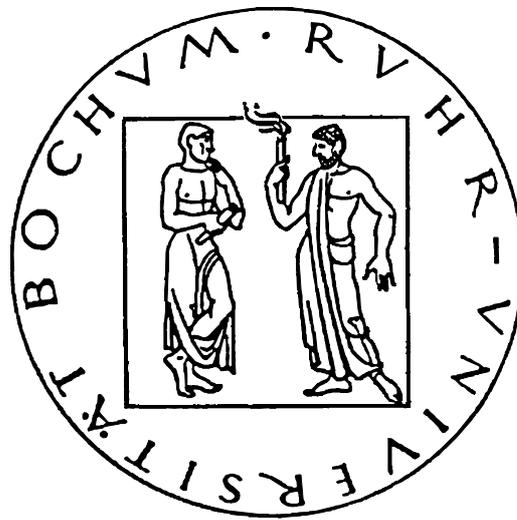


Berichte des Instituts für  
Geologie, Mineralogie und Geophysik  
der Ruhr-Universität Bochum

Reihe A (Geophysik)  
Nr. 59



Axel Tillmann

**Lösung der Grenzflächenproblematik  
bei der gemeinsamen Inversion  
geoelektrischer und seismischer Daten von  
oberflächennahen, porösen Schichten**

Mai 2001



Die vorliegende Arbeit wurde von der Fakultät für Geowissenschaften der Ruhr-Universität Bochum als Dissertation im Fach Geophysik zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften anerkannt.

- |              |                           |
|--------------|---------------------------|
| 1. Gutachter | Prof. Dr. Dr. h.c. Dresen |
| 2. Gutachter | Prof. Dr. Harjes          |
| 3. Gutachter | Prof. Dr. Schmitt         |

Tag der Disputation: 28. Mai 2001



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung in die Problematik</b>	<b>1</b>
1.1	Einführung . . . . .	1
1.2	Zielsetzung . . . . .	2
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	4
1.4	Symbolliste . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Das Gesteinsmodell</b>	<b>9</b>
2.1	Grundlegende Modellvorstellungen . . . . .	10
2.1.1	Diagenese eines klastischen Sedimentes . . . . .	10
2.1.2	Struktur und Textur des Gefüges . . . . .	12
2.1.3	Eigenschaften des Porenraumes . . . . .	14
2.2	Elastische Moduln eines porösen Gefüges . . . . .	16
2.2.1	Der einzelne Kornkontakt . . . . .	16
2.2.2	Makroskopische Eigenschaften . . . . .	17
2.2.3	Verhalten trockener Gefüge . . . . .	18
2.2.4	Berechnung der Kornkontaktflächen . . . . .	20
2.2.5	Der Einfluß der Porenfüllung . . . . .	23
2.3	Fluide im Porenraum . . . . .	26
2.3.1	Adsorption an der Kornoberfläche . . . . .	27
2.3.2	Wirkung der Kapillarkräfte . . . . .	27

2.3.3	Berechnung der Fluidsättigung	29
2.3.4	Permeabilität eines Sedimentes	30
2.4	Der elektrische Widerstand des Gefüges	32
2.5	Vergleich mit experimentellen Daten	35
2.6	Zusammenfassung	40
<b>3</b>	<b>Modellierung</b>	<b>41</b>
3.1	Die Geometrie des Untergrundes	42
3.2	Dynamik der Fluide im Porenraum	43
3.3	1-D Geoelektrik	44
3.4	1-D Refraktionsseismik	44
3.5	Die zuverlässige Berechnung der Dispersionskurven von Rayleigh-Wellen	45
<b>4</b>	<b>Inversion</b>	<b>49</b>
4.1	Einführung	49
4.2	Grundlagen iterativer Verfahren	51
4.3	Das Newton-Verfahren	52
4.4	Das Gauß-Newton-Verfahren	53
4.5	Verallgemeinertes Gradientenverfahren	54
4.5.1	Schrittweitenbestimmung	54
4.5.2	Konvergenz des Verfahrens	55
4.6	Anwendung der Verfahren	56
4.7	Singulärwertzerlegung	58
4.7.1	Orthogonale Projektionsoperatoren	59
4.7.2	Die generelle Inverse	59
4.7.3	Auflösung und Redundanz	60
4.7.4	Inversion in den Unterräumen	61
4.8	Joint Inversion	62

4.9	Inversion von Rayleigh–Wellen . . . . .	67
<b>5</b>	<b>Anwendungen</b>	<b>75</b>
5.1	Übersicht . . . . .	75
5.2	Modell eines Grundwasserspiegels im Halbraum . . . . .	76
5.3	Einzelinversion geoelektrischer Daten . . . . .	81
5.4	Inversion synthetischer Daten . . . . .	84
5.5	Inversion eines Felddatensatzes . . . . .	89
<b>6</b>	<b>Resumé</b>	<b>99</b>
6.1	Zusammenfassung . . . . .	99
6.2	Schlußfolgerungen und Ausblick . . . . .	101
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>103</b>
	<b>Danksagung</b>	<b>109</b>



# Kapitel 1

## Einführung in die Problematik

### 1.1 Einführung

Ziel der geophysikalischen Erkundung eines Gebietes ist es, ein möglichst umfassendes und detailliertes Bild des Untergrundes zu gewinnen. Dabei kann das Interesse schwerpunktmäßig sowohl auf die Auflösung des geometrischen Aufbaus als auch auf die Bestimmung der physikalischen Gesteinsparameter ausgerichtet sein.

In beiden Fällen ist die flächendeckende Erkundung nur mit Messungen an der Erdoberfläche realisierbar, wodurch zweifellos der „Blick“ auf die Geologie in starkem Maße eingeschränkt ist. Unter dem Begriff „Geologie des Untergrundes“ wird dabei in dieser Arbeit die geometrische Anordnung von Schichten mit unterschiedlichen Gefügeparametern verstanden. In der Praxis ist es aus den oben genannten Gründen üblich, im Feld mehrere geophysikalische Methoden anzuwenden, wobei die Auswahl der Art und des Umfangs der Messungen von der zu erwartenden Geologie des Meßgebietes abhängen.

Für die Erkundung oberflächennaher Strukturen haben sich die Refraktionsseismik und die Gleichstromgeoelektrik im Laufe der Jahrzehnte zu Standardverfahren entwickelt. Beide Methoden können unabhängig voneinander eingesetzt werden, um strukturelle Informationen zu erhalten. Allerdings besitzen beide Verfahren ihre individuellen Stärken und Schwächen. So ist die Methode der Refraktionsseismik an die Voraussetzung gebunden, daß die seismischen Geschwindigkeiten mit zunehmender Tiefe größer werden. Ist eine Zone niedriger Geschwindigkeit im Untergund vorhanden, so bildet sich an deren Oberkante keine refraktierte Welle aus, so daß dieses Strukturelement mit dieser Methode nicht detektiert werden kann. Im Gegensatz dazu sind geoelektrische Methoden nicht an solche Randbedingungen der Parameterverteilung gebunden. Schichten hohen und niedrigen elektrischen Widerstandes dürfen in beliebiger Reihenfolge auftreten. Wie bei allen anderen Potentialverfahren auch, wird die Zuverlässigkeit der Interpretation der Geoelektrik durch das Äquivalenzprinzip beeinträchtigt. So können zwei unterschiedliche Schichtun-

gen bei geeigneter Variation der Schichtmächtigkeiten und der spezifischen Widerstände dieser Schichten zu zwei äquivalenten Meßergebnissen führen. Die prinzipielle Idee der gemeinsamen Interpretation von refraktionsseismischen und geoelektrischen Messungen besteht darin, daß beide Verfahren einander Randbedingungen stellen, die gemeinsam zu einer zuverlässigeren Schätzung der geometrischen und physikalischen Parameter des Untergrundes führen.

Die gemeinsame formale Interpretation verschiedener geophysikalischer Messungen durch einen einzigen Algorithmus, die sogenannte „Joint Inversion“, wurde zuerst für Verfahren entwickelt, die auf den gleichen physikalischen Parametern beruhen. So entwickelten Vozoff & Jupp (1975) einen Algorithmus, der die gleichzeitige Inversion gleichstromgeoelektrischer und magnetotellurischer Messungen ermöglicht. Die Einbeziehung geoelektrischer Messungen zur Verbesserung der Interpretation seismischer Daten wurden für untertägige Erkundungen von Breitzke et al. (1987) und Dobróka et al. (1991) eingesetzt. Für die Erkundung oberflächennaher Strukturen wurden diese Ergebnisse entsprechend modifiziert, z.B. zur gemeinsamen Interpretation von Widerstandssondierungen und Rayleigh-Wellen durch Hering et al. (1995).

Bei all diesen Ansätzen zur Joint Inversion wird eine sehr vereinfachte Modellvorstellung des Untergrundes verwendet. So wird für die Seismik in der Regel ein Modell, bestehend aus einzelnen isotropen, homogenen elastischen Schichten, benutzt, um die Geometrie des Untergrundes zu erkunden. Diese Vorstellung einer homogenen Schicht wird ebenso in der Geoelektrik verwendet. Die Verfahren zur Joint Inversion von Seismik und Geoelektrik machen die Voraussetzung, daß die Grenzflächen für beide Verfahren geometrisch identisch sind. Zwar ist allen geophysikalischen Erkundungsmethoden die zugrundeliegende Geometrie der Geologie gemein, dennoch erweist sich der Lösungsansatz, verschiedene Verfahren durch das Gleichsetzen von Grenzflächen physikalischer Parameter zu koppeln, in vielen Fällen als nicht gerechtfertigt. Da Seismik und Geoelektrik von völlig verschiedenen physikalischen Parametern abhängen, ist diese Forderung häufig nicht erfüllt. So kann die getrennte Inversion beider Methoden sowohl unterschiedliche Schichtmächtigkeiten als auch eine unterschiedliche Schichtanzahl zum Ergebnis haben.

## 1.2 Zielsetzung

Diese Arbeit soll der genaueren Untersuchung der oben beschriebenen Fälle gewidmet werden, in denen der einfache Ansatz zur Joint Inversion versagt. Dabei kann man das Problem auf grundsätzlich unterschiedliche Art und Weise betrachten. Eine Möglichkeit besteht darin, den Inversionsprozeß dahingehend zu erweitern, daß der Fall nicht identischer Grenzflächen behandelbar wird. Damit würde man die Vorteile der Joint Inversion für eine oder mehrere Schichtgrenzen einbüßen. Dennoch bliebe die Möglichkeit erhalten, die übrigen Schichtgrenzen durch die gemeinsame Interpretation zuverlässiger zu bestimm-

men. Der grundsätzliche Nachteil dieser Herangehensweise ist allerdings die fehlende physikalische Motivation. Die algorithmische Behandelbarkeit nicht identischer Grenzflächen kann möglicherweise auch durch recht willkürliche Maßnahmen und Annahmen erreicht werden, deren Einklang mit den natürlichen Gegebenheiten an dieser Stelle der Datenbearbeitung nicht mehr geprüft werden kann. Eine Erklärung für das auftretende Phänomen liefert diese Methodik nicht.

Die andere Möglichkeit besteht darin, zunächst die physikalische Ursache nicht identischer Grenzflächen qualitativ und quantitativ zu erfassen, bevor eine gemeinsame Interpretation durch einen Joint Inversion Algorithmus durchgeführt wird. Aus dieser Perspektive betrachtet ist offensichtlich das Modellierungsproblem der primäre Ansatzpunkt für alle weiteren Betrachtungen.

Das erste Ziel dieser Arbeit ist demnach die Modellierung der einzelnen geophysikalischen Methoden so zu formulieren, daß sie den folgenden Bedingungen genügen:

- Die geophysikalische Grundlage der Modellierung ist eine klare und realistische geologische Modellvorstellung.
- Die Ergebnisse der geophysikalischen Modellierungen sind mit dem bisherigen Stand der Wissenschaft konsistent. Sie sind darüber hinaus in der Lage, ausgehend von einem gemeinsamen geologischen Modell, die Fälle von nicht identischen und/oder zahlenmäßig verschiedenen Grenzflächen vorherzusagen.
- Die unterschiedlichen geophysikalischen Methoden sind durch eine gemeinsame Geometrie der Geologie und, nach Möglichkeit, durch weitere physikalische Parameter miteinander verknüpft.

Die letzte dieser drei Forderungen bedingt die Erstellung eines geeigneten Bodenmodells, da die bisherige Annahme eines Schichtmodells mit einer homogenen Parameterverteilung innerhalb einer Schicht diese Bedingung nicht erfüllen kann.

Nach Erreichen dieses Zieles können die gewonnenen Erkenntnisse dazu genutzt werden, das Verhalten konventioneller Inversionsmethoden bei Änderung der Parameter zu studieren, die in die neuen Modellierungsalgorithmen einfließen. Dadurch soll ermittelt werden, unter welchen Bedingungen die Effekte auftreten, die eine erfolgreiche Joint Inversion bisher verhinderten. Als ein weiteres wichtiges Ergebnis dieser Arbeit soll damit die Frage geklärt werden, unter welchen Voraussetzungen an die geologische Situation im Meßgebiet eine konventionelle Joint Inversion durchgeführt werden kann und welche Gegebenheiten eine solche generell unmöglich machen. Diese Betrachtungen geben damit Hinweise für die zu verwendenden Meßkonfigurationen und die anschließende Auswertung.

Abschließend wird die Joint Inversion unter Verwendung des entwickelten Bodenmodells durchgeführt. Damit soll gezeigt werden, daß mit Hilfe des neuen Bodenmodells die Inver-

sion für eine erweiterte Klasse von geologischen Modellen gelingt. Neben einem synthetischen Beispiel wird dazu ein Datensatz aus refraktionsseismischen und geoelektrischen Felddaten bearbeitet. Die Interpretation der einzelnen Methoden liefert dabei Resultate, die untereinander nicht konsistent sind. Ziel ist es, mit Hilfe der in dieser Arbeit entwickelten und beschriebenen Methoden eine einheitliche Interpretation der Daten zu liefern.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

Die Arbeit gliedert sich in die Kapitel 2 bis 6. Zunächst sollen in Kapitel 2 die physikalischen Eigenschaften von Gesteinen, speziell von klastischen Sedimenten, extensiv untersucht werden. Dazu wird ein spezielles Gesteinsmodell definiert, welches aus einer regellosen Anordnung von Körnern besteht. Ausgehend von Betrachtungen in mikroskopischen Maßstäben werden makroskopische physikalische Parameter anhand der Eigenschaften dieser Körner beschrieben. Dabei kommt der Füllung des Porenraumes durch Gase oder Fluide eine besondere Bedeutung zu, da diese die geophysikalisch meßbaren Parameter in unterschiedlicher Weise beeinflussen. Es stellt sich heraus, daß im wesentlichen die Porosität und die Fluidsättigung die Verknüpfung von elastischen und elektrischen Parametern ermöglicht.

Im anschließenden 3. Kapitel werden die zur Modellierung verwendeten Methoden erläutert. Diese Ausführungen können recht kurz gehalten werden, da es sich überwiegend um Standardverfahren handelt. Dennoch soll auf die den einzelnen Methoden zugrundeliegenden Annahmen und die individuellen Eigenheiten eingegangen werden. Die Umkehrung der Modellierung, die formale Interpretation oder Inversion von geophysikalischen Messungen, wird in Kapitel 4 behandelt. Dabei wird ausführlich der Weg von den Grundlagen der Inversionstheorie zum verwendeten Inversionsalgorithmus dargestellt, insbesondere auch die Kriterien der Stabilität und die Abschätzung der Konvergenzgeschwindigkeit.

Im 5. Kapitel werden die in den vorhergehenden Kapiteln dargelegten theoretischen Grundlagen angewandt, um mit Hilfe geeigneter Modellrechnungen, und durch die Bearbeitung eines Felddatensatzes, die im vorigen Abschnitt aufgeworfenen Fragen zu beantworten. Die Ergebnisse werden abschliessend in Kapitel 6 im Hinblick auf die Zielsetzung dieser Arbeit und in der Vorausschau auf neu aufgeworfene Fragen diskutiert.

## 1.4 Symbolliste

In der folgenden Liste der verwendeten Symbole und Abkürzungen werden nur diejenigen Bezeichnungen aufgeführt, die abschnittsübergreifend, d.h. in mehr als einem Abschnitt verwendet werden. Symbole, die nur an einer Stelle verwendet werden, sind dort entsprechend erklärt und bedürfen nicht der Auflistung in dieser Übersicht. Vektoren und deren einzelne Elemente werden in der Form  $\underline{x}$  bzw.  $x_i$  notiert. Analog dazu werden Matrizen und deren Elemente in der Form  $\underline{\underline{X}}$  bzw.  $X_{i,j}$  notiert. In der Liste wird dabei sowohl die Schreibweise der Vektoren oder Matrizen als auch die der einzelnen Elemente aufgeführt, sofern diese Schreibweisen im Text auftauchen.

$A_c$	: Kontaktfläche
$A_k$	: Oberfläche eines Kornes
$A_p$	: Oberfläche einer Pore
$A_q$	: Querschnittsfläche
$c_k$	: Koordinationszahl
$C_k$	: maximale mittlere Koordinationszahl
$\underline{d}, d_i$	: Datenvektor
$\mathbb{D}$	: Raum aller Datenvektoren
$e_r$	: Relativer Fehler
$\underline{e}, e_i$	: Werte der EID
$\mathcal{F}(x)$	: Modellierungsfunktion
$\underline{\underline{F}}, F'_{i,j}$	: Matrix der partiellen Ableitungen (Jacobi-Matrix)
$g$	: Gravitationsbeschleunigung 9,81 m/s <sup>2</sup>
$G_m$	: Schermodul der trockenen Gefügematrix
$G_s$	: Schermodul des Kornmaterials
$\underline{\underline{H}}, H_{i,j}$	: Haskell-Matrix
$\underline{h}, h_i$	: Schichtmächtigkeiten
$h_w$	: Teufe der Grundwasseroberfläche
$i$	: Imaginäre Einheit
$\underline{\underline{I}}$	: Einheitsmatrix
$\mathcal{J}_1(x)$	: Besselfunktion erster Ordnung
$\underline{\underline{J}}, J_{i,j}$	: Beliebige $n \times m$ -Matrix
$K$	: Kompressionsmodul des feuchten Gesteins
$K_m$	: Kompressionsmodul der trockenen Gesteinsmatrix
$K_p$	: Kompressionsmodul des Porenraums
$K_s$	: Kompressionsmodul des Kornmaterials
$K_f$	: Kompressionsmodul des Fluids
$K_g$	: Kompressionsmodul des Gases
$K_{f,\text{eff}}$	: Kompressionsmodul des Fluid-Gas-Gemisches
$K_0$	: Effektiver Kompressionsmodul

$k$	: Wellenzahl
$l$	: Länge
$\underline{l}$	: Schrittrichtung
$\underline{\mathcal{L}}$	: Zu minimierende Fehlerfunktion
$\hat{\mathcal{L}}_e$	: Relativer Fehler in der Geoelektrik
$\hat{\mathcal{L}}_r$	: Relativer Fehler in der Oberflächenwellenseismik
$\hat{\mathcal{L}}_s$	: Relativer Fehler in der Refraktionsseismik
$m_k$	: Masse eines Kornes
$\underline{m}, m$	: Modellparametervektor
$\mathbb{M}$	: Raum aller Modellparametervektoren
$m_a$	: Zementationsfaktor
$m$	: Dimension des Modellparameterraumes
$N$	: Anzahl
$N_m$	: Anzahl der monomolekularen Schichten
$\mathbb{N}$	: Menge der natürlichen Zahlen
$n_a$	: Sättigungsfaktor
$n$	: Dimension des Datenraumes
$\mathcal{P}_{m(x)}$	: Massenwahrscheinlichkeitsdichte
$\mathcal{P}_{N(x)}$	: Numerische Wahrscheinlichkeitsdichte
$P(x)$	: Energiedichte
$p$	: Druck
$p_k$	: Kapillardruck
$p_h$	: Hydrostatischer Druck
$\mathfrak{P}$	: Projektionsoperator
$r$	: Radius
$r_c$	: Kontaktradius eines Hertz–Mindlin–Kontaktes
$r_b$	: Initialradius eines Hertz–Mindlin–Kontaktes
$R_c$	: Kontaktradius zwischen zwei Körnern
$R_b$	: Initialradius zwischen zwei Körnern
$r_k$	: Kornradius
$r_p$	: Porenradius
$r_a$	: Kornradius eines angelagertes Kornes
$\mathbb{R}$	: Menge der reellen Zahlen
$R$	: Elektrischer Widerstand
$r$	: Dimension des relevanten Daten- / Modellraumes
$S_w$	: Sättigung mit einem Fluid
$S_i$	: Irreduzible Sättigung
$s_k$	: Breite der Kornverteilung
$\underline{\underline{S}}$	: Diagonalmatrix der SVD, welche die Singulärwerte enthält
$s$	: Skalenfaktor

$t$	: Zeit
$\underline{\underline{\mathbf{U}}}$	: Den Datenraum aufspannende Teilmatrix der SVD
$v_{ph}$	: Phasengeschwindigkeit
$v_{gr}$	: Gruppengeschwindigkeit
$v_P$	: Kompressionswellengeschwindigkeit
$v_S$	: Scherwellengeschwindigkeit
$V_p$	: Volumen einer Pore
$\underline{\underline{\mathbf{V}}}$	: Den Modellraum aufspannende Teilmatrix der SVD
$x$	: Auslagenposition bei Messungen
$\hat{\mathbf{x}}_i$	: Einheitsvektor in $i$ -ter Richtung
$z[t_k]$	: Zeitreihe
$z$	: Tiefen-Achse mit positiver Richtung nach oben
$\alpha_p$	: Verhältnis von $A_p$ zu $4\pi r_p^2$ für eine Pore
$\alpha$	: Schrittweite
$\epsilon$	: Radius einer Umgebung
$\eta$	: Viskosität des Porenfluids
$\Theta_{n(x)}$	: Stefanescu-Kernfunktion
$\kappa_n$	: Normalsteifigkeit
$\kappa_t$	: Tangentialsteifigkeit
$\kappa_h$	: hydraulische Leitfähigkeit
$\kappa_p$	: Permeabilität
$\lambda$	: Eigenwert
$\mu_s$	: Poissonzahl des Kornmaterials
$\mu_m$	: Poissonzahl der Gefügematrix
$\mu$	: Poissonzahl des fluidgefüllten Gesteins
$\nu$	: Frequenz
$\varrho_s$	: Dichte des Kornmaterials
$\varrho_f$	: Dichte des Fluids
$\varrho_g$	: Dichte des Gases
$\varrho_c$	: Dichte
$\underline{\rho}, \rho_i$	: Spezifische Widerstände eines Schichtpaketes
$\rho_{app}$	: scheinbarer spezifischer Widerstand
$\rho_f$	: spezifischer Widerstand des Fluids
$\sigma_w^*$	: Oberflächenspannung eines 3-Phasen-Kontaktes
$\phi$	: Porosität
$\phi_c$	: kritische Porosität
CWT	: Continuous Wavelet Transformation
EID	: Effective Independence Distribution
SVD	: Singular Value Decomposition (Singularwertzerlegung)



# Kapitel 2

## Das Gesteinsmodell

Zentraler Punkt in der Methodik der Physik ist es, eine Modellvorstellung vom Objekt des Interesses zu schaffen. Im Rahmen der Gültigkeit dieses Modells ist man dann in der Lage, allgemeingültige Aussagen zu machen, die bestehende Beobachtungen erklären und zukünftige Beobachtungen vorhersagen können. Der Umfang und die Genauigkeit, mit der man dieses tun kann, bestimmt die Güte eines Modells.

Ziel dieses Kapitels ist es, für unterschiedliche räumliche Größenordnungen Modelle zu entwickeln, um das geophysikalisch meßbare Verhalten einer Probe anhand petrophysikalischer Parameter vorherzusagen. Dabei wird das Verhalten des Gefüges im mikroskopischen Maßstab, d.h. in der Größenordnung einzelner Körner und Poren, untersucht, um daraus die meßbaren physikalischen Parameter einer Gesteinsprobe anhand makroskopischer geologischer Gefügeparameter abzuleiten.

Dazu wird im Abschnitt 2.1 die behandelte Petrologie auf ein mathematisch fassbares Problem eingeschränkt. Die feste Gesteinsmatrix und der Porenraum werden getrennt betrachtet und jeweils in geeigneter Weise parametrisiert. Darauf aufbauend werden ausgehend von mikroskopischen Betrachtungen in Abschnitt 2.2 die seismischen Geschwindigkeiten und in Abschnitt 2.4 die elektrische Leitfähigkeit eines Gefüges hergeleitet. Die Abhängigkeit dieser Größen von den Gefügeparametern soll im Hinblick auf die gemeinsame Inversion seismischer und geoelektrischer Daten dahingehend untersucht werden, welche Gefügeparameter nur die Seismik oder die Geoelektrik und vor allem, welche Parameter beide Methoden beeinflussen. Da die elastischen und elektrischen Größen unterschiedlich von Fluiden im Porenraum abhängen, wird Abschnitt 2.3 der geometrischen Verteilung der Fluide und deren Einfluß auf die physikalischen Parameter gewidmet. In Abschnitt 2.5 werden die Modellvorhersagen anhand experimenteller Daten überprüft und abschließend werden die Ergebnisse dieses Kapitels in Abschnitt 2.6 zusammengefaßt.

## 2.1 Grundlegende Modellvorstellungen

### 2.1.1 Diagenese eines klastischen Sedimentes

Um Aussagen über physikalische Parameter eines Gesteins oder Lockermaterials zu machen, muß zuerst ein Modell entwickelt werden, das es ermöglicht, bestimmte Gefüge unterschiedlichen Entwicklungsstadiums mathematisch zu beschreiben. Der erste Schritt ist eine genaue Spezifizierung der zu untersuchenden Objekte. Diese Arbeit beschränkt sich auf Gefüge mit körniger Textur. Das heißt, das tragende Gerüst des Gefüges besteht aus einzelnen elastischen Körnern. Der verbliebene Porenraum sei mit einem Gas oder einem niedrigviskosen Fluid gefüllt. Eine genaue Quantifizierung der einschränkenden Eigenschaft „niedrigviskos“ erfolgt im weiteren Verlauf dieses Kapitels. Natürliche Gefüge dieser Art sind typischerweise klastische Sedimente wie Sande, Kiese und Konglomerate, Sedimentite wie z.B. Sandsteine, aber zum Teil auch Partikelkalke wie Oolithe. Zahlreiche experimentelle Untersuchungen wurden auch an künstlichen Gefügen aus Gläsern durchgeführt. Dort, wo absolute Parameterwerte in den weiteren Betrachtungen erforderlich sind, wird das Kornmaterial als Quarz und das Porenfluid als Wasser angenommen.

Der zweite Schritt in diesem Entwicklungsprozeß ist die Untersuchung von Proben, die repräsentativ für die zu beschreibende Gefügeart sind. Anhand dieser Beobachtungen hat man eine Vorstellung von der Genese klastischer Sedimente gewonnen.

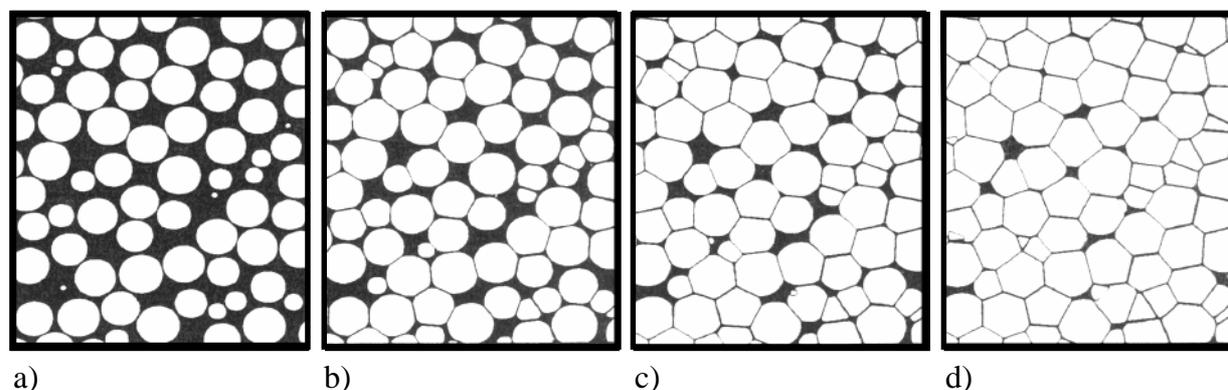


Abbildung 2.1: Computergenerierte Schnitte durch eine Probe. Die Porositäten der einzelnen Schnitte sind a)  $\phi = 0,36$ , b)  $\phi = 0,20$ , c)  $\phi = 0,10$  und d)  $\phi = 0,03$ . Nach Roberts et al. (1985)

Die Modellvorstellung von der Konsolidierung illustriert die Abbildungsfolge 2.1 a–d. Die Entstehung eines Sedimentes erfolgt durch lokale Akkumulation einzelner fester Körner aus einer Suspension ( Abbildung 2.1a ). Der Porenraum, in der Abbildung schwarz dargestellt, ist zunächst mit dem Ablagerungsmedium, d.h. Luft oder Wasser, gefüllt. Der Übergang von einer Suspension zu einer tragfähigen Matrix wird durch die kritische Poro-

sität  $\phi_c$  gekennzeichnet. In den Experimenten von Farris (1968) und Marion & Nur (1989) an körnigen Materialien wurden kritische Porositäten von  $\phi_c = 0,39-0,40$  bestimmt. Obwohl die dichteste Packung identischer Kugeln eine Porosität von  $\phi = 0,26$  besitzt, läßt sich die Porosität homodisperser Sande durch Einrütteln kaum auf Werte unter 0,35 reduzieren, da Reibungskräfte an den Berührungsstellen der Körner die Umlagerung verhindern. In diesem frühen Stadium sind Sedimente verhältnismäßig lockere Gefüge mit geringer Dichte und Festigkeit.

Diese Reibungskräfte können durch den Gesteinsdruck überwunden werden (Abbildung 2.1 b-d). Dieser bewirkt eine rein mechanische Kompaktion des unverfestigten Sedimentes ohne chemische Reaktionen. Eine Porositätsabnahme durch mechanische Prozesse ist im wesentlichen auf die Frühdiagenese beschränkt. Da feste und fluide Phasen nicht miteinander interagieren, ist dieser diagenetische Prozeß mathematisch relativ einfach zu beschreiben. Die Orte und Massen der einzelnen Körner bleiben im wesentlichen erhalten, während sich mit zunehmender Kompaktion ebene Kontaktflächen ausbilden.

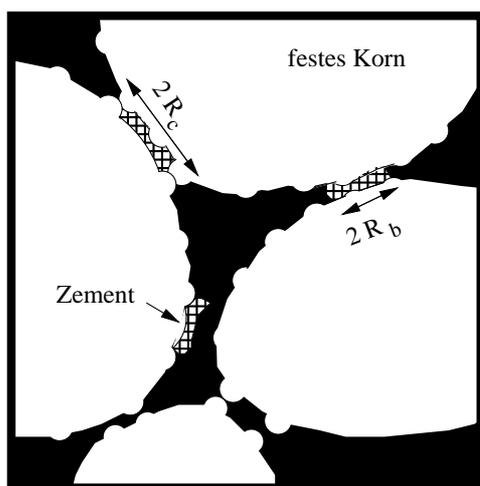


Abbildung 2.2: Detailansicht aus Abbildung 2.1a.

Eine Detailsicht des zu untersuchenden Korngefüges zeigt die nebenstehende Abbildung. Die Kontaktregionen zwischen den einzelnen Körnern bestehen aus einem oder mehreren Kontaktpunkten, einem Zement, oder beidem. Die Durchmesser  $2R_c$  einer Kontaktregion bzw.  $2R_b$  eines aus Zement bestehenden Kontaktes sind wegen ihres unterschiedlichen Einflusses auf die physikalischen Eigenschaften der Kornmatrix gesondert bezeichnet. Obwohl eine Zementation zwischen einzelnen Körnern in den Betrachtungen berücksichtigt wird, soll der Porenraum frei von Zement und Tonpartikeln sein. Insbesondere Anteile von Tonen beeinflussen die Eigenschaften eines Gefüges in starkem Maße durch ihr Quellverhalten und ihre elektrische Leitfähigkeit.

Da beide Eigenschaften von Tonpartikeln zudem sowohl von der Sättigung der Poren mit einem Fluid als auch von der Art und Konzentration der gelösten Salze abhängig sind, sollen diese komplexen Effekte aus den grundsätzlichen Überlegungen ausgeklammert werden.

Im fortgeschrittenen Stadium bestimmen chemische Prozesse die Diagenese. Beispielsweise entsteht durch Verwitterung ein Zement aus Tonmineralen, die Produkte der Zersetzung von Feldspäten sind. Ferner bilden aus dem Porenwasser ausfallende Minerale einen festen Zement und führen zu einer weiteren Verringerung des Porenraumes. Dies können z.B. schnell wachsende Calcit- oder Aragonitkristalle oder authigener Quarz, d.h. Quarz-

neubildungen aus durch Drucklösung entstandener Kieselsäure, sein. Der Zeitpunkt des Einsetzens und die Art dieser Prozesse bestimmen die Porosität bis zu der die Diagenese durch ein physikalisch–mechanisches Modell beschrieben werden kann. Da ein solches Modell Grundlage der folgenden Betrachtungen darstellt, ist somit gleichzeitig der Gültigkeitsbereich des Modells klar definiert.

### 2.1.2 Struktur und Textur des Gefüges

Das Gerüst klastischer Sedimente besteht aus festen Körnern unterschiedlicher Größe und Form. Die Kornradien variieren dabei zwischen Mikrometern bei Ton bis zu Dezimetern bei grobem Kies und Geröll. Die Form der Partikel reicht von kugelig bis stengelig oder flach. Größe, Form und Material der Partikel bestimmen die physikalischen Eigenschaften des daraus gebildeten Gefüges. Wegen der einfachen Geometrie wird die Form der Partikel in den folgenden Ausführungen als kugelig angenommen.

Der kleinste Bestandteil des Gefüges, ein einzelnes Korn, wird geometrisch durch seinen Radius  $r_k$  und petrophysikalisch durch die Dichte des Kornmaterials  $\rho_s$ , dessen Schermodul  $G_s$  und Poissonzahl  $\mu_s$  beschrieben. Für die Gesamtheit des Gefüges sind die Anteile von festem Gerüst und Porenraum wohl die wichtigsten Kennzahlen. Quantitativ wird diese Relation durch die Porosität  $\phi$  erfasst, welche das Verhältnis des Porenraumvolumens zum Gesamtvolumen angibt. Der Volumenanteil des festen Korngerüstes ist dann  $1 - \phi$ . Neben der Porosität ist der Anteil der Körner einer bestimmten Größe am Gefüge, also die Kornverteilungskurve, eine wichtige charakteristische Größe eines Sedimentes. Die Kornverteilungskurve wird experimentell im allgemeinen durch Sieben und Schlämmen ermittelt, wobei die Verteilung in Intervalle von Korndurchmessern, den sogenannten Fraktionen, diskretisiert wird. Die Fraktionen werden gewogen und in der Regel als kumulative Summe gegen den Korndurchmesser aufgetragen. Die resultierende Verteilungskurve gibt den Massenanteil der Körner mit einem Durchmesser kleiner als  $2r_k$  am Gefüge an. Für die in dieser Arbeit durchgeführten numerischen Modellierungen habe ich die Kornmassenverteilung durch die stetige Funktion

$$m_{k(r_k, s_k)} = \frac{315}{256} \left[ \frac{1}{9} \xi^9 - \frac{4}{7} \xi^7 + \frac{6}{5} \xi^5 - \frac{4}{3} \xi^3 + \xi \right] + \frac{1}{2} \quad (2.1)$$

$$\text{mit} \quad \xi = \frac{1}{s_k} \log \left( \frac{r_k}{r_{k,50}} \right)$$

$$\text{und} \quad \xi \in [-1, 1] \quad \text{und} \quad r_k \in [r_{k,50} 10^{-s_k}, r_{k,50} 10^{s_k}]$$

in Abhängigkeit vom Kornradius  $r_k$ , dem mittleren Kornradius  $r_{k,50}$  und der Verteilungsbreite  $s_k$  definiert.

Durch differenzieren nach  $r_k$  erhält man die Massenverteilungsdichte

$$\mathcal{P}_{m(r_k)} = \frac{\partial m_k}{\partial r_k} = \frac{315}{256 s_k r_k} \left[ \xi^8 - 4\xi^6 + 6\xi^4 - 6\xi^2 + 1 \right]. \quad (2.2)$$

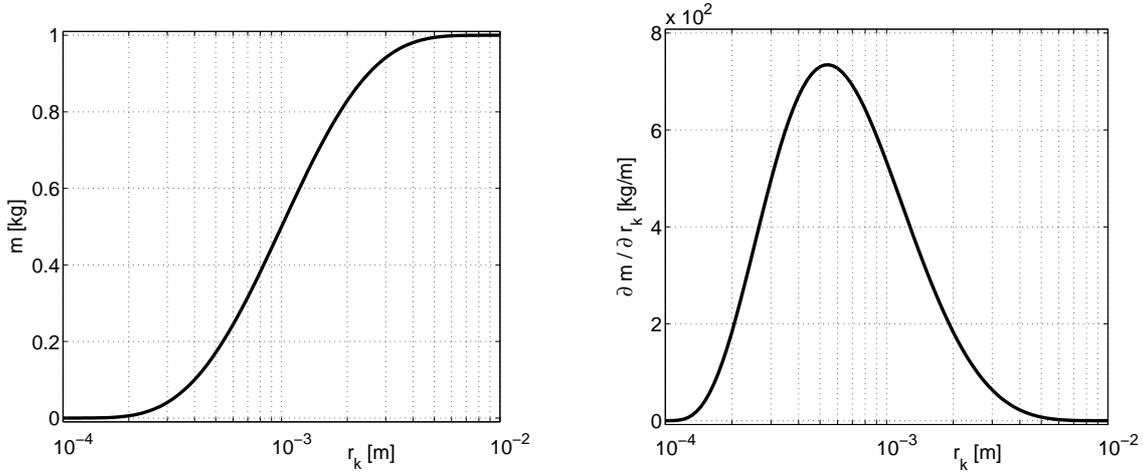


Abbildung 2.3: Angenommene Kornmassenverteilung. *Links*: Die Verteilungskurve nach Gleichung (2.1). *Rechts*: Die Massenverteilungsdichte aus Gleichung (2.2). Beide wurden für  $r_{k,50} = 10^{-3}\text{m}$  und  $s_k = 1$  berechnet.

Durch die in Gleichung (2.1) gewählte Definition der Kornmassenverteilung ist die Massenverteilungsdichte auf 1 normiert.

Damit ist die Struktur des Gefüges durch zwei Parameter charakterisiert, den Kornradius  $r_{k,50}$ , der durch die Eigenschaft  $m_k(r_{k,50}) = 0,50$  definiert ist und die Verteilungsbreite  $s_k$ . Dabei legt  $s_k$  die Radien  $r_{k,50} \cdot 10^{\pm s_k}$  fest, für die die Massendichteverteilung  $\mathcal{P}_{m(r_k)}$  zu Null wird. Die Massen- und Massendichteverteilung sind in Abbildung 2.3 dargestellt. Die etwas willkürliche Wahl des Polynoms 9. Grades für die Massenverteilung in Gleichung (2.1) besitzt den Vorteil der Finitheit und damit der effektiveren Implementierung. Da die Betrachtungen in dieser Arbeit nicht an eine spezielle Verteilung gebunden sind, kann Gleichung (2.1) durch eine adäquate Verteilung ersetzt werden.

Die Umrechnung der Massenverteilungsdichte zur normierten Verteilungsdichte  $\mathcal{P}_{N(r_k)}$  der Zahl der Kugeln des Radius  $r_k$  erfolgt über das Kugelvolumen und Dichte eines Kornes durch

$$\mathcal{P}_{N(r_k)} = \frac{\mathcal{P}_{m(r_k)} r_k^{-3}}{\int \mathcal{P}_{m(r_k)} r_k^{-3} dr_k}. \quad (2.3)$$

Neben der anteiligen Masse oder Anzahl der Körner eines bestimmten Radius am Gefüge ist deren Anordnung im Raum kennzeichnend. Deshalb wird zur Charakterisierung von Kugelpackungen die Koordinationszahl  $c_k$  verwendet. Sie gibt die Anzahl der Nachbarn einer Kugel an und ist in regulären Packungen über das gesamte Volumen konstant. So ist  $c_k = 12$  für die kubisch dichteste Packung gleich großer Kugeln. Die Koordinationszahl  $c_k$  läßt sich jedoch auch mit Hilfe des Ansatzes berechnen, daß nur so viele Körner mit Radius  $r_a$  ein zentrales Korn mit  $r_k$  umgeben können, bis diese den vollen Raumwinkel

$4\pi$  abdecken. Daraus folgt:

$$c_k = \frac{2\pi}{\sin^{-1}\left(\frac{r_a}{r_k+r_a}\right)}. \quad (2.4)$$

In Abbildung 2.4 ist  $c_k$  in Abhängigkeit vom Kornradius  $r_a$  der umgebenden Körner für ein zentrales Korn mit dem Radius  $r_k = 1$  mm aufgetragen.

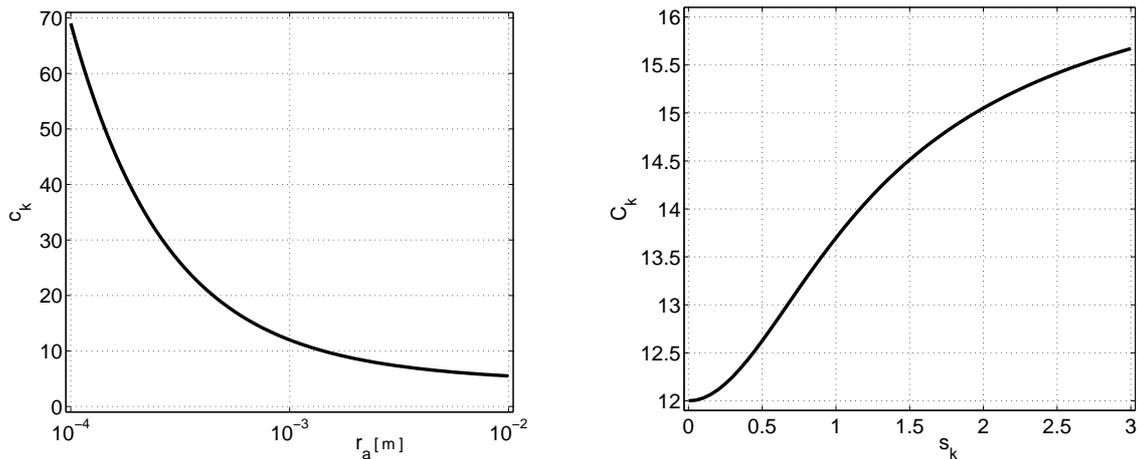


Abbildung 2.4: *Links:* Die Koordinationzahl  $c_k$  in Abhängigkeit vom Radius  $r_a$  der umgebenden Kugel. *Rechts:* Die maximale mittlere Koordinationzahl  $C_k$  in Abhängigkeit von der Verteilungsbreite  $s_k$ .

Für zufällige Anordnungen ist  $c_k$  kleiner als die Koordinationzahl der dichtesten Packung, aber über ein makroskopisches Probenvolumen konstant. Die mittlere Koordinationzahl ist dann sowohl abhängig von der Korngrößenverteilung als auch von der jeweiligen Schüttung. Einfach zu berechnen ist die maximale mittlere Koordinationzahl  $C_k$  als der Mittelwert aller vorkommenden  $c_k$ , d.h.

$$C_k = \int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{P}(r_k) \mathcal{P}(r_a) c_k(r_k, r_a) dr_a dr_k. \quad (2.5)$$

Wie Abbildung 2.4 deutlich macht, erhöht sich die maximale mittlere Koordinationzahl  $C_k$ , je breiter die Korngrößenverteilung bzw. je schlechter die Sortierung ist.

### 2.1.3 Eigenschaften des Porenraumes

Analog zur Korngrößenverteilung existiert eine Verteilung der Porengrößen. Während die Geometrie eines einzelnen Kornes recht einfach zu beschreiben ist, besitzt eine einzelne Pore eine komplizierte, unregelmäßige Gestalt. Aus diesem Grund ist es zweckmäßig den Porenradius über das Porenvolumen zu definieren. In den folgenden Betrachtungen ist

daher unter dem Porenradius  $r_p$  immer der Radius der volumenäquivalenten Kugel mit  $r_p = (3V_p / 4\pi)^{\frac{1}{3}}$  zu verstehen.

Das Gesamtvolumen des Porenraumes steht zum Gesamtvolumen der Kornmatrix bei gegebener Porosität in einem festen Verhältnis, so daß

$$\frac{1}{\phi} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{N(r_p)} r_p^3 dr_p = \frac{1}{1-\phi} \int_0^{\infty} \mathcal{P}_{N(r_k)} r_k^3 dr_k \quad (2.6)$$

gilt. Ferner kann man eine starke Korrelation zwischen den Verteilungen von Korn- und Porenradien unterstellen (siehe z.B. Busch & Luckner (1973)). Mit der Annahme, daß sich beide Verteilungen nur durch einen konstanten Faktor im Argument unterscheiden, besteht der einfache Zusammenhang

$$r_p = \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{N_k}{N_p} r_k, \quad (2.7)$$

wobei  $N_k$  und  $N_p$  die Anzahl der Körner bzw. der Porenräume sind.

Die der Gleichung (2.7) zugrunde liegende Annahme ist nur gültig, solange die Kornverteilungsbreite  $s_k$  klein genug ist, so daß  $r_{p,\max} \leq r_{k,\min}$ . Ist diese Bedingung erfüllt, so ist ein beliebiges Korn stets größer als ein bestehender Porenraum. So wird ein halboffener Porenraum während des Sedimentationsprozesses durch ein neu sedimentiertes Korn unter Bildung einer Pore geschlossen, woraus  $N_k/N_p = 1$  folgt. Auch eine nachträgliche Unterteilung eines Porenraumes in mehrere Poren durch Suffusion kleinerer Körner in eine Pore ist damit ausgeschlossen. Die maximale Kornverteilungsbreite für diesen Fall kann für die durch Gleichung (2.1) definierte Kornverteilung unter Verwendung von Gleichung (2.7) leicht zu

$$s_k \leq \frac{1}{6} \log_{10} \left( \frac{1-\phi}{\phi} \right) \quad (2.8)$$

bestimmt werden. Für Porositäten von 0,05–0,39 liegt  $s_k$  im Bereich von 0,21–0,03. Das Kriterium  $r_{p,\max} \leq r_{k,\min}$  wird auch für größere Verteilungsbreiten  $s_k$  als durch Gleichung (2.8) hinreichend genau erfüllt sein, da die Anteile der Korn- bzw. Porenradien in den Randbereichen der Verteilung recht gering sind, und der einem Korn zur Verfügung stehende Radius kleiner ist als der durch das äquivalente Volumen definierte Porenradius.

Für sehr schlecht sortierte Korngefüge ist die Wahrscheinlichkeit abzuschätzen, daß ein der Kornmatrix hinzugefügtes Korn mit dem Radius  $r_a$  einen bestehenden Porenraum füllt und damit in mehrere kleinere Poren unterteilt. Diese Situation ist sehr schlecht zu quantifizieren, da diese Wahrscheinlichkeit auch von der wahren Porengeometrie und von Umlagerungsprozessen von kleinen beweglichen Körnern durch den Porenraum abhängig ist. Eine Nichtberücksichtigung dieser Effekte führt dazu, daß die Anzahl kleiner Porenräume höher sein wird als die durch Gleichung (2.7) und die Kornradienverteilung vorhergesagten Werte. Das führt zu einer systematischen Unterbestimmung des mittleren Kornradius durch eine Inversion für schlecht sortierte Gefüge.

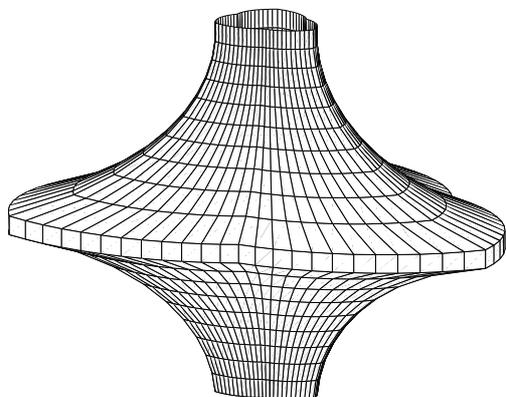


Abbildung 2.5: Oberfläche eines Porenraumes

Bei der Anwendung von Gleichung (2.7) muß man berücksichtigen, daß der Porenradius  $r_p$  durch die mit der Pore volumenäquivalente Kugel definiert wurde. In einem realen Gefüge ist ein Porenraum nicht kugelförmig, sondern besitzt eine geometrisch recht kompliziert zu beschreibende Gestalt, näherungsweise etwa die des in der nebenstehenden Abbildung gezeigten Körpers. Daher wird die tatsächliche Oberfläche einer Pore immer größer sein als die Oberfläche der volumenäquivalenten Kugel. Bei Berechnungen, in die die Oberflächen der Poren involviert sind, muß dieser Tatsache Rechnung getragen werden.

Um die Diskrepanz zwischen den beiden Oberflächen zu quantifizieren, definiere ich den Geometriefaktor  $\alpha_p$ , der das Verhältnis der Porenoberfläche zur Oberfläche der volumenäquivalenten Kugel beschreibt. Offensichtlich ist  $\alpha_p > 1$ , z. B. gilt  $\alpha_p = 1,24$  für eine würfelförmige Porengeometrie. Abbildung 2.5 zeigt beispielhaft einen Körper, der in etwa meiner Vorstellung von der Geometrie einer Pore entspricht. Durch numerische Integration über die Oberfläche dieses Körpers wurde für diese Geometrie ein  $\alpha_p$  von 1,35 bestimmt. Für das zugrundeliegende Modell kann der exakte Wert von  $\alpha_p$  mit Hilfe der kritischen Porosität  $\phi_c$  berechnet werden. Da die Bestimmung von  $\alpha_p$  gleichsam als Nebenprodukt der Berechnungen in Abschnitt 2.2.4 gelingt, soll an dieser Stelle auf diesen Abschnitt verwiesen werden.

## 2.2 Elastische Moduln eines porösen Gefüges

### 2.2.1 Der einzelne Kornkontakt

Wie in Abbildung 2.2 skizziert, umfaßt eine intergranulare Kontaktregion des Radius  $R_c$  eine Anzahl „punktförmiger“ elastischer Kontakte und eine geringe Menge elastischen Zementes. Jeder einzelne dieser „punktförmigen Kontakte“ wird durch seine Normal- und Tangentialsteifigkeiten repräsentiert. Für den einfachen Fall zweier sich berührender elastischer Kugeln mit den Radien  $r_k$ ,  $r_a$ , wie er in Abbildung 2.6 dargestellt ist, ergeben sich einfache Ausdrücke für die Steifigkeiten.

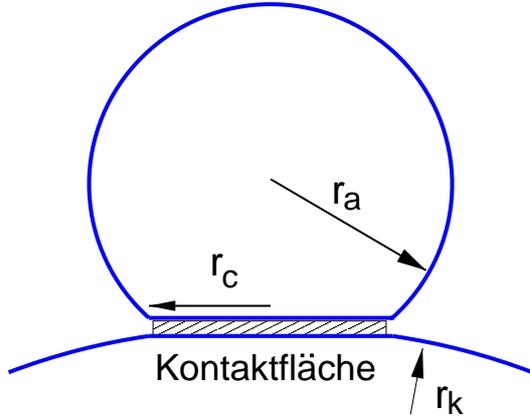


Abbildung 2.6: Hertz-Mindlin-Kontakt.

Wie Mindlin (1949) gezeigt hat, hängen die Steifigkeiten dieses sogenannten Hertz-Mindlin-Kontaktes vom Schermodul  $G_s$  und der Poissonzahl  $\mu_s$  der Kugeln, sowie vom Radius des Hertz-Mindlin-Kontaktes  $r_c$  bzw. dem initialen Bindungsradius  $r_b$  ab. Die Normal- und Tangentialsteifigkeiten eines Kontaktes zweier Kugeln sind dann

$$\kappa_n = \frac{4G_s r_c}{1 - \mu_s} \quad (2.9)$$

$$\text{und } \kappa_t = \frac{8G_s r_b}{2 - \mu_s}. \quad (2.10)$$

Dabei wird angenommen, daß die Kugeln anfänglich auf einer Kreisfläche mit Radius  $r_b$  miteinander verbunden sind. Dies mag zum Beispiel auf eine Zementation, Sinterung oder ähnliches zurückzuführen sein. Bei Einwirkung einer äußeren Kraft, z.B. durch Erhöhung des hydrostatischen Drucks auf die Kugeln, vergrößert sich der Hertz-Mindlin-Kontakt auf den Radius  $r_c \geq r_b$ . Im Falle einer unkonsolidierten Anordnung von Kugeln existiert keine anfängliche Bindung, d.h.  $r_b = 0$ . In diesem Fall besitzt der Kontakt keine Tangentialsteifigkeit und das Verhalten des Kontaktes wird bei gegebenem Material nur durch den Radius  $r_c$  beeinflusst. Dieser ist nach Tutuncu & Sharma (1992) unmittelbar von der externen Auflast  $F$  abhängig und kann mit der Beziehung

$$r_c^3 = \frac{3(1 - \mu_s)}{4G_s} \frac{r_k r_a}{r_k + r_a} F \quad (2.11)$$

berechnet werden. Dabei sind  $r_k$  und  $r_a$  die Radien der sich berührenden Kugeln. Wirkt nur ein Druck  $p_h$  auf die Kugeln, so ist die Kraft  $F = 4\pi r_k^2 p_h$ . Sei  $r_k$  der Radius eines Kornes und  $r_a$  der Radius einer Rauigkeit, d.h. das Größenverhältnis der Radien sei  $r_k \gg r_a$ , so ist der Radius

$$r_c = \left( \frac{3\pi(1 - \mu_s)p_h}{G_s} \frac{r_a}{r_k} \right)^{\frac{1}{3}} r_k. \quad (2.12)$$

### 2.2.2 Makroskopische Eigenschaften

Die Wirkungen aller Kontakte in einem Gefüge bestimmen die makroskopischen elastischen Moduln, die man experimentell durch Messung der Geschwindigkeiten  $v_P$  und  $v_S$  ermitteln kann. Nehmen wir das Gefüge zunächst als eine trockene, zufällige Packung von Kugeln an. Für diesen Fall konnte Digby (1981) den Schermodul  $G_m$  und den Kompressionsmodul  $K_m$  bzw. die elastischen Geschwindigkeiten anhand der mikroskopischen

Kontaktsteifigkeiten wie folgt berechnen:

$$(1 - \phi) \varrho_s v_S^2 = G_m = \frac{(1 - \phi) C_k}{20\pi r_k} \left( \kappa_n + \frac{3}{2} \kappa_t \right) \quad (2.13)$$

$$(1 - \phi) \varrho_s (v_P^2 - \frac{4}{3} v_S^2) = K_m = \frac{(1 - \phi) C_k}{20\pi r_k} \frac{5}{3} \kappa_n. \quad (2.14)$$

Ein weiterer Parameter neben der Porosität  $\phi$  und dem Kornradius  $r_k$  ist die Koordinationszahl  $C_k$ . Sie gibt die Zahl der benachbarten Kugeln in einer Packung an. Im Falle idealer Kugeln, wie sie in der Originalarbeit von Digby (1981) betrachtet wurden, ist  $C_k$  gleich der Zahl der Hertz–Mindlin–Kontakte einer Kugel. Realistischer ist es, wenn man das einzelne Korn als kugelig mit rauher, unregelmäßig geformter Oberfläche annimmt. Somit treten an die Stelle der  $C_k$  Hertz–Mindlin–Kontakte zwischen den einzelnen Körnern flächige Kontaktregionen, die aus mehreren Einzelkontakten bestehen.

Diese Kontaktregion ist dann durch die Kontaktdichte  $n_c$  charakterisiert, die die Anzahl der Hertz–Mindlin–Kontakte pro Einheitsfläche angibt. Daher erweitere ich  $C_k$  aus Gleichung (2.14) zu  $C_k n_c A_c(\phi)$ . Dabei gehe ich davon aus, daß die Fläche  $A_c(\phi)$  der Kontaktregionen anhand der Porosität  $\phi$  ableitbar ist. In der bisherigen Literatur wird  $A_c(\phi)$  als näherungsweise linear angenommen (Nolen–Hoeksema (1993), Murphy et al. (1993)), obwohl ein nichtlineares Verhalten in experimentellen Daten (Murphy et al. (1993)) ersichtlich ist. In Abschnitt 2.2.4 werde ich daher die funktionale Abhängigkeit der Fläche  $A_c$  von  $\phi$  für eine Kornverteilung herleiten. Mit Hilfe dieser Erweiterung lassen sich die elastischen Moduln aus den Gleichungen (2.13 – 2.14) gemeinsam mit den Gleichungen (2.9 – 2.12) wie folgt schreiben:

$$G_m = \sqrt[3]{\frac{3}{250\pi^2} \frac{r_a}{r_k} p_h} G_s^{\frac{2}{3}} \left( \frac{1}{(1 - \mu_s)^{\frac{2}{3}}} + \frac{3(1 - \mu_s)^{\frac{1}{3}} r_b}{(2 - \mu_s) r_c} \right) C_k n_c A_c(\phi) (1 - \phi) \quad (2.15)$$

$$K_m = \sqrt[3]{\frac{3}{54\pi^2} \frac{r_a}{r_k} p_h} G_s^{\frac{2}{3}} (1 - \mu_s)^{-\frac{2}{3}} C_k n_c A_c(\phi) (1 - \phi) \quad (2.16)$$

D.h. die zwei elastischen Moduln der Gefügematrix sind abhängig von den mikroskopischen Parametern  $G_s$ ,  $\mu_s$ ,  $r_b$ ,  $C_k$ ,  $n_c$  und dem Verhältnis  $\frac{r_a}{r_k}$ , das als Maß für die Oberflächenrauigkeit der Körner angesehen werden kann. Ferner besteht eine Abhängigkeit von den makroskopischen Parametern  $\phi$ ,  $p_h$  und den aus ihnen abgeleiteten Größen  $A_c(\phi)$  und  $r_{c(p_h)}$ . Dabei wird die Kontaktregionfläche  $A_c$  einen dominierenden Einfluß auf die elastischen Moduln der Gefügematrix haben.

### 2.2.3 Verhalten trockener Gefüge

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt die elastischen Moduln für die Kornmatrix aus den mikroskopischen Gefügeparametern hergeleitet wurden, sollen im folgenden die makroskopischen Eigenschaften näher untersucht werden. Dazu zählen insbesondere die un-

terschiedliche Sensitivität der Moduln auf einzelne Parameter, sowie die Möglichkeit, die Berechnung der Moduln zu vereinfachen.

Zahlreiche Parameter in Gleichung (2.16) entziehen sich unserer Kenntnis. Die elastischen Eigenschaften der einzelnen Körner und das Druckregime können aber als zeitlich konstant angesehen werden. Aus diesem Grund können diese Parameter zu einer für das Gefüge und dessen Lagerungsort charakteristischen Konstanten  $K_0$  zusammengefasst werden. Dadurch läßt sich der Kompressionsmodul vereinfacht durch

$$K_m = K_0 (1 - \phi) \hat{A}_c(\phi) \quad (2.17)$$

als Funktion der Porosität schreiben. Für die neu eingeführte Funktion der relativen Kontaktregionfläche  $\hat{A}_c(\phi)$  gilt:  $\hat{A}_c(\phi) \sim C_k A_c$ . Sie sei auf den Funktionswert für  $\phi=0$  normiert, so daß sie die Aufgabe einer Skalierungsfunktion mit

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} K_m = K_0 \quad \text{und} \quad \lim_{\phi \rightarrow \phi_c} K_m = 0 \quad (2.18)$$

erfüllt.

Auch die Berechnung des Schermoduls läßt sich weiter vereinfachen. Wie man an den Gleichungen (2.15) und (2.16) leicht sehen kann, ist das Verhältnis der elastischen Moduln unabhängig von der Porosität, der Koordinationszahl, der Kontaktdichte und der Korngröße. Dazu äquivalent ist die von Winkler (1983) gezeigte Unabhängigkeit des Verhältnisses  $v_P/v_S$  der seismischen Geschwindigkeiten oder der makroskopischen Poissonzahl  $\mu_m$  der Gefügematrix von diesen Parametern.

Bildet man das Verhältnis der Geschwindigkeitsquadrate, so ergibt sich

$$\frac{v_P^2}{v_S^2} = \frac{K_m}{G_m} + \frac{4}{3} = \frac{3\kappa_n + 2\kappa_t}{\kappa_n + \frac{3}{2}\kappa_t} = \frac{3(2 - \mu_s) + 4\frac{r_b}{r_c}(1 - \mu_s)}{(2 - \mu_s) + 3\frac{r_b}{r_c}(1 - \mu_s)} = \frac{1 - \mu_m}{0,5 - \mu_m}. \quad (2.19)$$

Anhand dieser Gleichung erkennt man, daß die Poissonzahl  $\mu_m$  der Gefügematrix unmittelbar nur von der Poissonzahl  $\mu_s$  des Kornmaterials und vom Verhältnis des initialen Bindungsradius  $r_b$  zum Radius  $r_c$  der Hertz–Mindlin–Kontakte abhängig ist. Daher ist es möglich, den Schermodul der Gefügematrix

$$G_m = \frac{3(1 - 2\mu_m)}{2(1 + \mu_m)} K_m \quad (2.20)$$

mit Hilfe der Poissonzahl  $\mu_m$  direkt aus dem Kompressionsmodul zu berechnen, so daß die Abhängigkeit von den strukturellen Parametern erhalten bleibt.

Wie aus Gleichung (2.12) hervorgeht, besteht weiterhin eine mittelbare Abhängigkeit des Radius  $r_c$  vom Schermodul  $G_s$  des Kornmaterials und dem hydrostatischen Druck  $p_h$ . Für einen Hertz–Mindlin–Kontakt ohne anfängliche Bindung durch einen Zement oder ähnliches ( $r_b = 0$ ) ist das Verhältnis  $v_P/v_S = \sqrt{3}$  und somit die Poissonzahl  $\mu_m = 0,25$ . Dies

gilt völlig unabhängig von allen weiteren Parametern, insbesondere der Poissonzahl des Kornmaterials. Da weiterhin  $r_b \leq r_c$  gilt, kann die Poissonzahl der trockenen Gesteinsmatrix nur in einem Bereich  $0 \leq \mu_m \leq 0,25$  liegen. Für ein Gefüge, welches zusätzlich eine Bindung durch einen Zement zwischen den Kornkontakten besitzt, ist die Poissonzahl von dem Verhältnis  $r_b/r_c$  abhängig. Mit Erhöhung des Druckes verringert sich dieses Verhältnis, so daß die Poissonzahl gegen 0,25 strebt. Die Abbildung 2.7 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen der resultierenden Poissonzahl des Korngerüstes und den beiden mikroskopischen Parametern  $\mu_s$  und  $r_b/r_c$ .

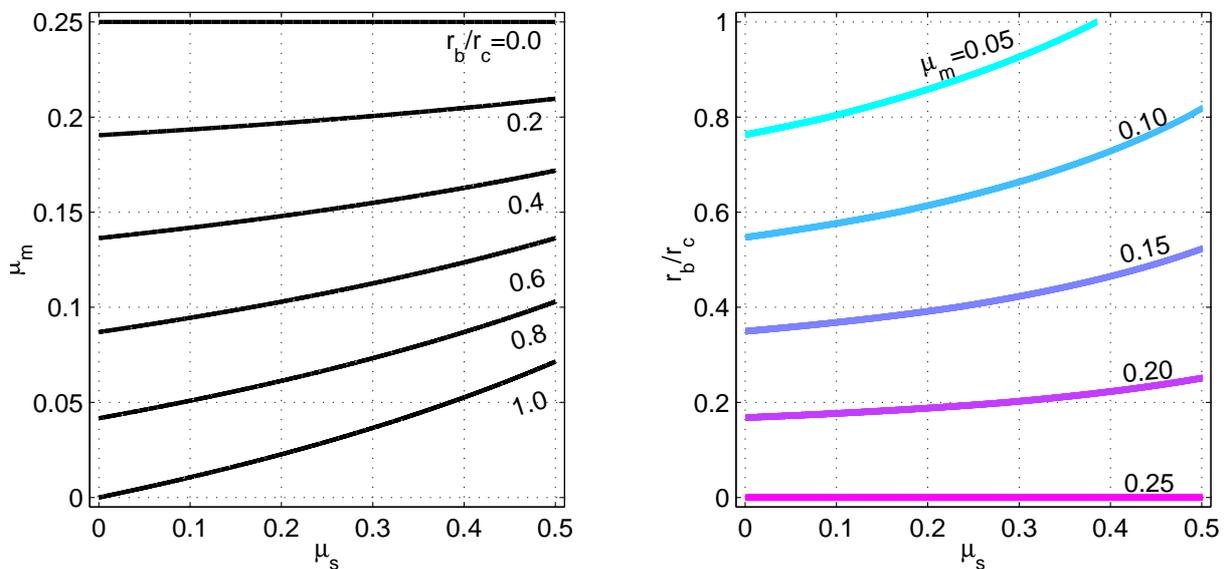


Abbildung 2.7: Zusammenhänge zwischen der Poissonzahl der Kornmatrix  $\mu_m$  in Abhängigkeit von der Poissonzahl der Körner  $\mu_s$  und dem Anteil  $\frac{r_b}{r_c}$  des Zementes am Kontaktradius.

## 2.2.4 Berechnung der Kornkontaktflächen

Eine beliebige Stelle der Oberfläche eines Kornes ist entweder eine Grenzfläche zum Porenraum oder eine Kontaktfläche zu einem benachbarten Korn. Um die gesamte Kontaktfläche zwischen den Körnern  $A_c$  in einer Probe zu bestimmen, verwende ich die Differenz zwischen der Gesamtoberfläche aller Körner und der Gesamtoberfläche des Porenraumes  $A_k - A_p$ . Die Oberfläche der Gesteinsmatrix  $A_k$  ist leicht anhand der Kornradiusverteilungskurve zu bestimmen. Die enge Beziehung der Porenradius- zur Kornradiusverteilung wie sie in Abschnitt 2.1.3 angenommen wurde, bestimmt auch die Oberfläche des Porenraumes  $A_p$ .

Für eine gegebene Kornradiusverteilung  $\mathcal{P}(r_k)$  und unter der Verwendung des in Abschnitt

2.1.3 definierten Geometriefaktors  $\alpha_p$  ist die Gesamtkontaktfläche

$$\begin{aligned} A_s = A_k - A_p &= \int_0^\infty 4\pi r_k^2 \mathcal{P}(r_k) dr_k - \int_0^\infty 4\pi \alpha_p r_p^2 \mathcal{P}(r_p) dr_p \\ &= 4\pi \left( 1 - \alpha_p \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \langle r_k^2 \rangle. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Nimmt  $\phi$  den Wert der kritischen Porosität  $\phi_c$  an, so bilden die einzelnen Körner keine feste Gesteinsmatrix mehr und das Gefüge geht in eine Suspension über. In diesem Fall ist  $A_s = 0$ , woraus

$$\alpha_p = \left( \frac{1 - \phi_c}{\phi_c} \right)^{\frac{2}{3}} \quad (2.22)$$

resultiert. Wie in Abschnitt 2.1.1 erläutert wurde, beträgt die kritischen Porosität  $\phi_c \approx 0,39$  für das hier betrachtete Gefügemodell, so daß  $\alpha_p = 1,34$ .

Die in Gleichung (2.21) berechnete Fläche  $A_s$  besitzt eine sphärische Form. Daher ist diese Gleichung nur für den Übergang aus der Suspension zum Gerüst exakt gültig, also für  $\phi = \phi_c$  und  $A_s = 0$ . Mit abnehmender Porosität infolge der Kompaktion werden zwischen den einzelnen Körnern Teile der sphärischen Oberflächen zu ebenen Kontaktregionen deformiert, siehe auch Abbildung 2.1. Dabei reduziert sich eine einzelne sphärische Fläche  $A_s$  zur ebenen Kontaktregionfläche

$$A_c = A_s - A_s^2 A_k^{-1}. \quad (2.23)$$

In einer Packung sei jedes Korn mit  $C_k$  anderen Körnern umgeben, d.h. die Fläche  $A_s$  wird auf diese Anzahl von Kontaktregionen verteilt. Somit ist in Gleichung (2.23)  $A_s$  durch  $A_s/C_k$  zu ersetzen. Abhängig von der Kornradienverteilung wird die Koordinationszahl  $C_k$  mit Gleichung (2.5) berechnet und es ergibt sich für den Erwartungswert der relativen Kontaktregionfläche:

$$\hat{A}_c(\phi) \sim \langle C_k A_c \rangle = \left\langle A_s \left( 1 - A_s C_k^{-1} A_k^{-1} \right) \right\rangle. \quad (2.24)$$

Der Erwartungswert für die kritische Porosität ist gleich 0. Mit einer Normierung von Gleichung (2.24) auf  $\phi = 0$  erhalte ich die relative Kontaktregionfläche:

$$\begin{aligned} \hat{A}_c(\phi) &= \left[ 1 - \alpha_p \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{2}{3}} \right] \\ &\cdot \left[ 1 + \alpha_p \left( \frac{\phi}{1-\phi} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{\int_0^\infty \int_0^\infty r_k^2 \sin^{-1} \left( \frac{r_a}{r_k+r_a} \right) \mathcal{P}_N(r_a) \mathcal{P}_N(r_k) dr_a dr_k}{\int_0^\infty \int_0^\infty r_k^2 \left\{ 2\pi - \sin^{-1} \left( \frac{r_a}{r_k+r_a} \right) \right\} \mathcal{P}_N(r_a) \mathcal{P}_N(r_k) dr_a dr_k} \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die relative Kontaktregionfläche  $\hat{A}_c \in [0, 1]$  beschreibt die sukzessive Lockerung des Gefüges beim Übergang vom soliden Körper hin zur Auflösung des Korngerüsts in eine Suspension. Gleichung (2.25) impliziert die Annahme, daß sich die Porengestalt mit abnehmender Porosität nicht ändert, d.h. es wird  $\alpha_p = \text{const.}$  gefordert. Wie aus dem einleitenden Abschnitt 2.1 dieses Kapitels hervorgeht, sind die hier verwendeten Modellvorstellungen nicht für beliebig kleine Werte von  $\phi$  gültig. Neben den dort beschriebenen Gründen schränkt eine geometrische Verformung der Poren durch die diagenetischen Prozesse den Gültigkeitsbereich der Betrachtungen ein. Roberts et al. (1985) geben für ihre Modellierungen von Kugelpackungen eine untere Porosität von 0,04 an, ab der sich das geometrische Verhalten der Poren bei weiterer Kompaktion wesentlich ändert.

Im Gültigkeitsbereich von Gleichung (2.25) läßt sich der elastische Kompressionsmodul der Gefügematrix durch Gleichung (2.17) beschreiben. Ferner wird aus Gleichung (2.25) ersichtlich, daß die relative Kontaktregionfläche  $\hat{A}_c$  und damit die elastischen Moduln nichtlinear von der Porosität  $\phi$  und der Kornradienverteilung  $\mathcal{P}(r_k)$  abhängig sind.

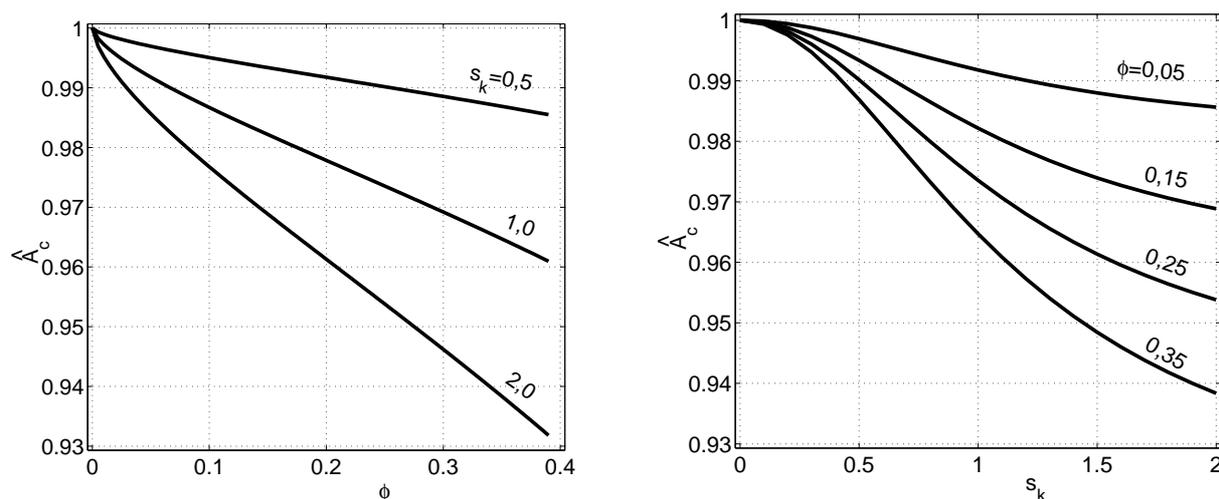


Abbildung 2.8: Die Änderung der Kontaktfläche in Abhängigkeit von der Porosität  $\phi$  und der Verteilungsbreite  $s_k$  relativ zur Kontaktfläche für Kornverteilungsbreite  $s_k = 0$ .

Der Einfluß der Verteilungsbreite der Kornradien  $s_k$  auf die relative Kontaktregionfläche soll anhand der Abbildung 2.8 aufgezeigt werden. Dort wurde  $\hat{A}_c(\phi, s_k)$  für verschiedene Parameterpaare berechnet und auf die zugehörigen Funktionswerte von  $\hat{A}_c(\phi, 0)$  normiert. Somit ist der alleinige Einfluß der Verteilungsbreite sichtbar.

Wie aus der Abbildung 2.8 ersichtlich wird, geht eine systematische Verringerung von  $\hat{A}_c$  und damit der elastischen Moduln mit einer Verbreiterung der Kornverteilung einher. Dieser Effekt ist umso größer, je höher die Porosität des Gefüges ist. Insgesamt ist der Einfluß aber gering und liegt um 7 Prozent für ein sehr poröses, schlecht sortiertes Sediment.

### 2.2.5 Der Einfluß der Porenfüllung

In Abschnitt 2.2.2 wurde der funktionale Zusammenhang der elastischen Moduln bzw. der seismischen Geschwindigkeiten von den petrophysikalischen Parametern für ein trockenes, poröses, körniges Medium hergeleitet. Im allgemeinen sind die Poren eines natürlichen Gefüges aber zum Teil mit einem Fluid, meistens Wasser, gefüllt. Der Anteil des Fluids am Porenraum ist die Fluidsättigung  $S_w$ , dementsprechend ist der Anteil am Gesamtvolumen  $S_w\phi$ . Ein Gefüge mit  $S_w = 1$  heißt daher gesättigt. Daher reduziert sich der gasgefüllte Anteil des Porenraumes zu  $(1 - S_w)\phi$ . Durch die Füllung des Porenraumes werden die seismischen Geschwindigkeiten durch die Veränderung der Dichte und der elastischen Moduln beeinflusst.

Die Gesamtdichte  $\rho_c$  ergibt sich aus den Dichten der festen, flüssigen und gasförmigen Phase  $\rho_s$ ,  $\rho_f$  und  $\rho_g$ , die gemäß ihres Anteils am Gesamtvolumen gewichtet werden, zu

$$\rho_c = (1 - \phi)\rho_s + S_w\phi\rho_f + (1 - S_w)\phi\rho_g. \quad (2.26)$$

Die in Gleichung (2.26) definierte Dichte beeinflusst die beiden seismischen Geschwindigkeiten  $v_P$  und  $v_S$  in gleicher Weise, abhängig von der Porosität  $\phi$  und der Sättigung  $S_w$ . Das Verhältnis  $v_P/v_S$  wird durch die Variation der Dichte nicht beeinflusst.

Die Porenfüllung wirkt aber auch direkt und in unterschiedlicher Weise auf die elastischen Moduln. Um den Einfluß auf die makroskopischen Parameter berechnen zu können, müssen einige Anforderungen an das physikalische Verhalten im mikroskopischen Maßstab gestellt werden:

1. Das System aus Korngerüst und Porenfüllung kann durch zwei Verschiebungsfelder, eines für die solide, das andere für die fluide Phase, beschrieben werden. D.h. beide Phasen sind vermischt und bilden jeweils ein Kontinuum.
2. Das Fluid befindet sich in miteinander verbundenen Porenräumen, so daß Fluidfluß stattfindet.
3. Das Fluid verfügt über keine Scherfestigkeit.
4. Das Fluid bewirkt weder durch Fluß eine Veränderung des Korngerüstes noch beeinflusst es die Steifigkeit der Kontakte, z.B. durch Kohäsion oder Quellen des Zementes.
5. Die Porosität ist makroskopisch gleichförmig verteilt.
6. Die Wellenlängen der betrachteten elastischen Wellen sind sehr viel größer als die größte vorkommende Poren- oder Korngröße. Eine Forderung, die für die Belange der Seismik sicherlich erfüllt sein dürfte.

Da es sich in dem hier betrachteten Fall um ein Gas oder Fluid handelt, wird der Schermodul  $G$  aufgrund der per definitionem fehlenden Scherfestigkeit der Porenfüllung nicht beeinflusst. Der durch Messung von  $v_S$  bestimmbare Schermodul ist also sowohl für ein gesättigtes wie für ein trockenes Medium gleich dem Schermodul der Gesteinsmatrix  $G_m$ . Der Einfluß der Porenfüllung auf die Scherwellengeschwindigkeit

$$\varrho_c v_S^2 = G_m \quad (2.27)$$

ist dadurch auf die Dichte  $\varrho_c$  beschränkt und folglich recht gering.

Im Gegensatz dazu besteht eine starke Abhängigkeit der Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_P$  vom Sättigungsgrad, da der Kompressionsmodul des Porenfluids  $K_f$  in der Größenordnung des Kompressionsmoduls  $K_m$  der Gefügematrix liegt. In Gleichung 2.14 wird  $K_m$  durch  $K$  ersetzt, so daß

$$\varrho_c v_P^2 = K + \frac{4}{3}G_m, \quad (2.28)$$

gilt. Der beobachtbare Kompressionsmodul  $K$  ist nun eine Funktion der Moduln der festen, flüssigen und in sehr geringem Maße der gasförmigen Phase. Diesen funktionalen Zusammenhang liefert die Biot–Theorie (Biot (1956a) und Biot (1956b)). Das Verhalten des Systems aus fester Matrix und teils flüssiger, teils gasförmiger Porenfüllung ist frequenzabhängig. In der Seismik ist es dabei hinreichend, die Biot–Gassmann Gleichungen nach Gassmann (1951a) als Näherung für niedrige Frequenzen zu verwenden. Die Grenzfrequenz  $\nu_{\text{krit.}}$  bis zu der die Gassmann–Näherung gültig ist, wurde von Johnson et al. (1987) anhand der Porosität  $\phi$  und der Permeabilität  $\kappa_p$  des Gesteins, sowie der Dichte  $\varrho_f$  und der Viskosität  $\eta$  des Fluids berechnet:

$$\nu_{\text{krit.}} \approx \frac{\eta \phi}{\kappa_p \varrho_f}. \quad (2.29)$$

Mit Wasser als Porenfluid kann man so für einen lockeren Sand mit  $\phi = 0,37$  eine kritische Frequenz von 5kHz berechnen, für einen Sandstein mit  $\phi = 0,2$  ergeben sich schon 140kHz.

Für  $\nu \ll \nu_{\text{krit.}}$  ist der Kompressionsmodul durch die Gassmann–Gleichungen

$$K = K_s \frac{\phi K_m + Q}{\phi K_s + Q} \quad \text{mit} \quad Q = \frac{K_{f,\text{eff}} (K_s - K_m)}{(K_s - K_{f,\text{eff}})} \quad (2.30)$$

beschrieben. In Gleichung (2.30) werden die Moduln für die gasförmige und fluide Phase zu einem effektiven Modul

$$K_{f,\text{eff}} = \left( \frac{S_w}{K_f} + \frac{1 - S_w}{K_g} \right)^{-1} \quad (2.31)$$

des Fluid–Gas–Gemisches eines partiell gesättigten Porenraums zusammengefaßt. Für den Grenzfall  $S_w \rightarrow 0$  und unter Vernachlässigung des Kompressionsmoduls des Gases wird

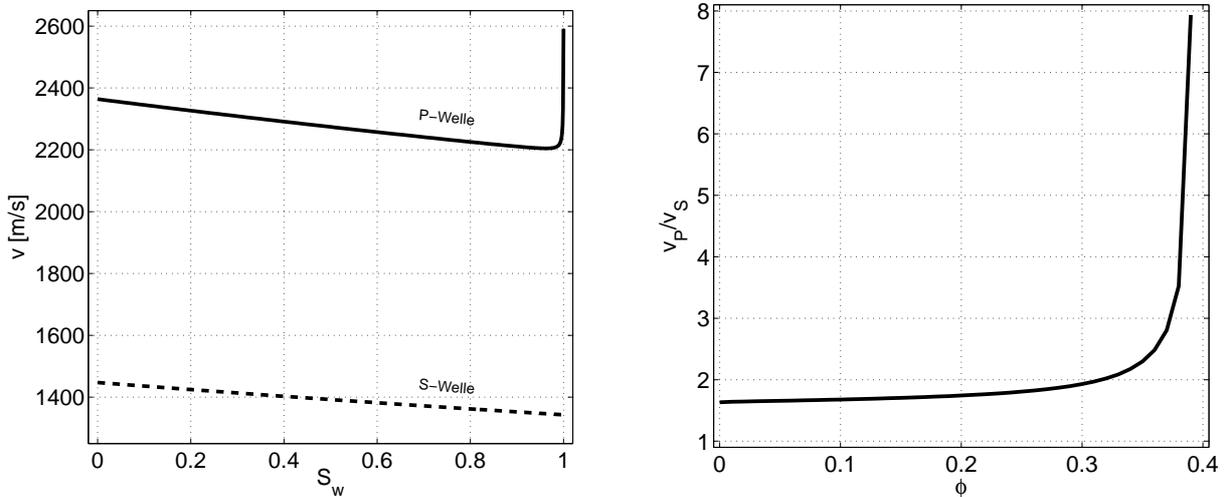


Abbildung 2.9: *Links:* Die seismischen Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von der Sättigung  $S_w$ . *Rechts:*  $v_P/v_S$ -Verhältnisse in gesättigten Proben abhängig von der Porosität  $\phi$  der Proben.

$Q = 0$ , so daß Gleichung (2.30) der Gleichung (2.17) für die trockene Kornmatrix entspricht. Für den Grenzfall  $\phi \rightarrow 0$  resultiert für  $K$  der Modul eines festen Kornes  $K_s$ .

Der Einfluß des Porenfluids auf die seismischen Geschwindigkeiten ist je nach Sättigungsgrad sehr unterschiedlich. In Abbildung 2.9 sind  $v_P$  und  $v_S$  eines Sediments mit  $\phi = 0,30$  als Funktion der Sättigung dargestellt. Die S-Wellengeschwindigkeit  $v_S$  wird aufgrund der geforderten fehlenden Scherfestigkeit nur über die mit der Fluidsättigung zunehmende Dichte beeinflusst und nimmt linear mit der Sättigung ab. Da die P-Wellengeschwindigkeit in gleicher Weise von der Dichte abhängt, folgt sie dem Verhalten der Scherwelle, so daß das Verhältnis  $v_P/v_S$  fast über den gesamten Sättigungsbereich konstant bleibt. Für Sättigungen von 0,99 bis 1 findet ein sehr starker, schon als sprunghaft zu bezeichnender Anstieg von  $v_P$  statt.

Damit einhergehend steigt das Verhältnis  $v_P/v_S$  beim Übergang zur vollständigen Sättigung an. Im folgenden soll untersucht werden, welche  $v_P/v_S$ -Verhältnisse in einer gesättigten Probe zu erwarten sind. Dazu wurde die Porosität im Bereich  $[0, \phi_c]$  variiert und das  $v_P/v_S$ -Verhältnis berechnet. Das Ergebnis ist ebenfalls in Abb. 2.9 dargestellt. Dort ist zu erkennen, daß eine merkliche Erhöhung dieses Verhältnisses erst für Porositäten ab 0,30 festzustellen ist. Dies ist nicht in erster Linie auf den wachsenden Volumenanteil des Porenfluids zurückzuführen, sondern vielmehr auf die stark abnehmende Festigkeit des Korngerüsts für  $\phi \rightarrow \phi_c$ . Für den Grenzfall des Übergangs zur Suspension strebt die Scherfestigkeit gegen 0 und daher  $v_P/v_S$  gegen unendlich.

Im Abschnitt 2.2.3 wurden die Poissonzahlen von trockenen Gefügen untersucht und ge-

zeigt, daß das Korngerüst eine von der Porosität unabhängige Poissonzahl  $\mu_m$  besitzt, die den Wert 0,25 nicht übersteigt. Die meßbare Poissonzahl  $\mu$  eines gesättigten Gefüges ist dagegen sehr wohl von der Porosität abhängig. In Abbildung 2.10 sind die Zusammenhänge zwischen der meßbaren Poissonzahl  $\mu$ , der Poissonzahl der Kornmatrix  $\mu_m$  und der Porosität  $\phi$  dargestellt.

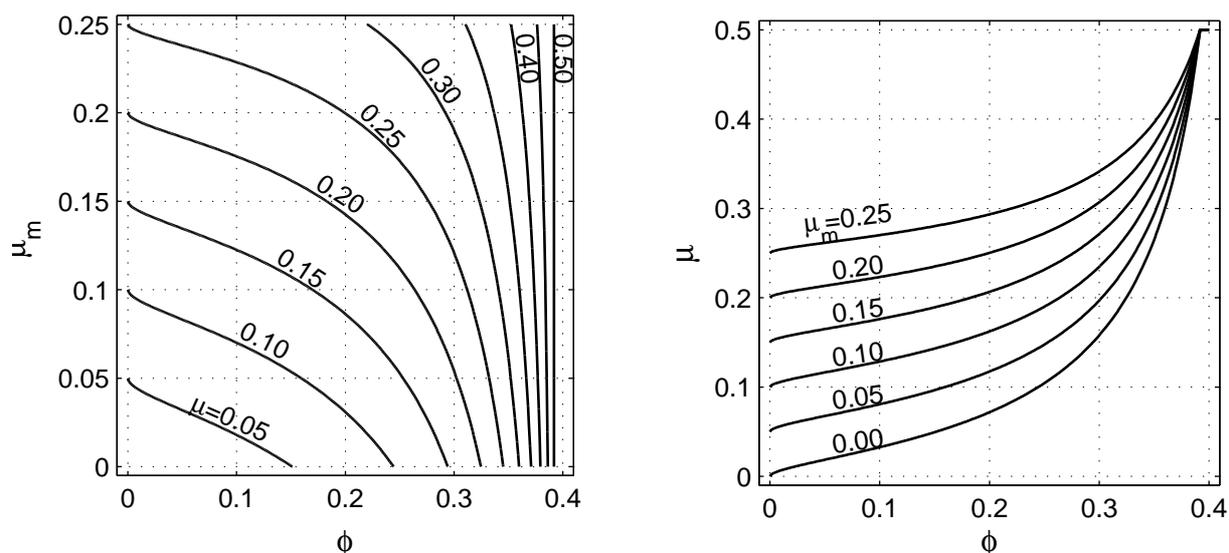


Abbildung 2.10: Poissonzahl einer gesättigten Probe als Funktion der Porosität und der Poissonzahl der trockenen Kornmatrix.

Zusammenfassend kann man konstatieren, daß die seismischen Geschwindigkeiten nur in geringem Maße von der Sättigung des Porenraumes abhängen. Erst der Übergang zur vollständigen Sättigung des Porenraumes bewirkt eine merkliche Veränderung von  $v_P$  bei konstant bleibendem  $v_S$ . Deshalb lassen gemessene Poissonzahlen größer als 0,25 auf eine Fluidsättigung schließen. Unter der Voraussetzung einer ausreichend hohen Porosität kann dieses Verhalten als Indikator für eine Grundwasseroberfläche dienen.

## 2.3 Fluide im Porenraum

Der Begriff Grundwasseroberfläche ist gebräuchlich, um die Grenzfläche anzusprechen, auf der der hydrostatische Druck  $p_h$  gleich dem Luftdruck ist. Das entspricht der Grenzfläche eines Bereiches mit vollständig gesättigtem Porenraum. Die Grundwasseroberfläche sollte nicht mit dem Grundwasserspiegel verwechselt werden, womit der Wasserstand in Brunnen nach Druckausgleich mit dem Grundwasser bezeichnet wird. Der Ausdruck „Grundwasseroberfläche“ ist auch insofern irreführend, da er die Existenz einer scharfen geometrischen Grenze impliziert, die einen Bereich mit vollständig wassergesättigten Poren von einem mit vollständig luftgefüllten Poren trennt. Tatsächlich wird der Wassergehalt der

ungesättigten Zone eines Bodens oberhalb der Grundwasseroberfläche durch verschiedenste Mechanismen beeinflusst. Zum einen werden Wassermoleküle und Ionen durch Adsorption an der Oberfläche der Körner gehalten. Zum anderen verändern zeitlich variierendes Einsickern und Abfließen den Sättigungsgrad in der ungesättigten Zone. Während der dynamische Prozeß des Wasserflusses von der Permeabilität des Gesteins kontrolliert wird, bestimmen die Kapillarkräfte im Porenraum den verbleibenden Wassergehalt des durchflossenen Mediums.

Der Sättigungsgrad eines Gesteins ist definiert als das Verhältnis des Volumens der fluidgefüllten Poren zum Gesamtvolumen des Porenraumes.

### 2.3.1 Adsorption an der Kornoberfläche

Neben den mobilen Fluiden im Porenraum ist ein Anteil des Wassers im Porenraum an die Mineralpartikel des Korngerüsts gebunden. Dieses Adsorptionswasser bildet eine geschlossene Schicht von nur einigen Lagen Wassermoleküle auf der Oberfläche des Porenraumes, welche die Eigenschaften bei geringen Sättigungsgraden dominiert (Knight & Dvorkin (1992)). Mit wachsendem Abstand zur Kornoberfläche lassen die Wechselwirkungen zwischen Wasser- und Mineralmolekülen nach, so daß sie ab der 4. monomolekularen Schicht (Fripiat et al. (1982)) vernachlässigt werden können. Thorp (1959) bestimmte die Dicke einer monomolekularen Wasserschicht zu 0,35 nm. Der Anteil des Adsorptionswassers am Porenraum läßt sich anhand der Oberfläche des Porenraumes und der Anzahl der monomolekularen Wasserschichten berechnen:

$$S_w = \frac{3,5 \cdot 10^{-10} N_m A_p}{V_p}. \quad (2.32)$$

Dabei bezeichnen  $A_p$  und  $V_p$  die Oberfläche bzw. das Volumen des Porenraums und  $N_m$  ist die Anzahl der Wassermolekülschichten.

### 2.3.2 Wirkung der Kapillarkräfte

Die Kapillarkräfte im Porenraum bewirken, daß Wasser entgegen der Gravitation in den Poren gehalten wird oder entlang geeigneter Wegsamkeiten aufsteigen kann. Das bedeutet, daß der Porenraum bei der Austrocknung eines Bodens nicht völlig entleert wird. Ferner steigt Wasser aus einem Grundwasserreservoir in den Bereich oberhalb des Grundwasserspiegels auf und bildet dort die Kapillarwasserzone mit teilgesättigtem Porenraum. Innerhalb der Kapillarwasserzone ist eine sukzessive Abnahme der Wassersättigung mit der Höhe über dem Grundwasserspiegel zu beobachten. Knapp oberhalb des Grundwasserspiegels ist der Porenraum praktisch gesättigt, während weiter oben nur noch die kleineren Poren Wasser enthalten.

Die Ursache der Kapillarität liegt in der Grenzflächenenergie zwischen beliebigen Stoffen. Die Grenzflächenenergie ist proportional zur Grenzfläche selbst, wobei der Proportionalitätsfaktor die spezifische Grenzflächenenergie oder Grenzflächenspannung  $\sigma$  ist. Fluide und Gase können als mobile Aggregate unter Materialtransport den Zustand minimaler Grenzfläche annehmen, weshalb z.B. Tröpfchen kugelig sind. Die Grenzflächenspannung zwischen zwei Stoffen kann auch negative Werte annehmen. Diese führen zur Durchmischung von zwei Flüssigkeiten oder zur Benetzung eines Festkörpers durch eine Flüssigkeit.

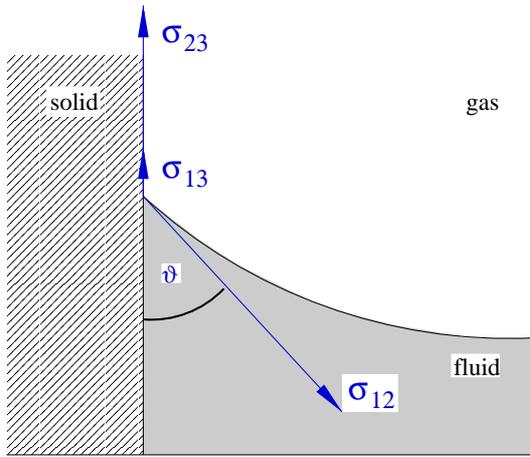


Abbildung 2.11: Gleichgewichtszustand der Grenzflächenspannungen. Nach Gerthsen et al. (1989).

Im Porenraum eines Gesteins sind drei Phasen vorhanden. Wie in Abbildung 2.11 gezeigt, treten drei unterschiedliche Grenzflächen mit ihren jeweiligen spezifischen Grenzflächenenergien auf: flüssig–fest  $\sigma_{fs}$ , gasförmig–flüssig  $\sigma_{gf}$  und gasförmig–fest  $\sigma_{gs}$  auf. An der Grenzlinie aller drei Phasen, müssen die Spannungen im Gleichgewicht sein, d.h.  $\sigma_w^* = \sigma_{fs} - \sigma_{gs} = -\sigma_{gf} \cos(\vartheta)$ , wobei  $\sigma_w^*$  die sogenannte Haftspannung und  $\vartheta$  der Randwinkel ist, den die Flüssigkeitsoberfläche mit der Porenwand einschließt. Für gut benetzende Flüssigkeiten ist dieser Winkel sehr klein, so daß  $\cos(\vartheta) \approx 1$  gilt. Für die in dieser Arbeit betrachteten Fälle verwende ich  $\sigma_w^* = 7,42 \cdot 10^{-2} \text{Nm}^{-1}$  für eine Wasser–Quarz–Grenzfläche bei einer Temperatur von  $10^\circ$  Celsius.

Für einen zylindrischen Porenraum läßt sich aus dem Spannungsgleichgewicht leicht der Kapillardruck ableiten. Sei der Radius des Zylinders  $r_p$ , so wirkt die Haftspannung  $\sigma_w^*$  auf einen Rand der Länge  $2\pi r_p$ . Normiert man die resultierende Kraft auf die Zylinderquerschnittsfläche, so erhält man den Kapillardruck

$$p_k = \frac{2\pi\sigma_w^*r_p}{\pi r_p^2} = \frac{2\sigma_w^*}{r_p}, \quad (2.33)$$

der dem hydrostatischen Druck entgegenwirkt. Der hydrostatische Druck eines Fluids ist abhängig von der Höhe  $h_w$  der Wassersäule  $p_h = g\rho_f h_w$ , so daß die Steighöhe des Fluids

$$h_w = \frac{2\sigma_w^*}{g\rho_f r_p} \quad (2.34)$$

ist.

Eine Pore bleibt fluidgefüllt, solange der hydrostatische Druck den Kapillardruck nicht übersteigt, d.h. wenn  $p_k - p_h > 0$ . Mit diesem Kriterium kann man eine erste Abschätzung

machen, ab welchem Porenradius Kapillarkräfte berücksichtigt werden müssen, da das Porenfluid nicht mehr aufgrund des Eigengewichtes aus der Pore ausfließt. Gegeben sei eine kugelförmige, unten offene Kapillare mit Radius  $r_p$ , gefüllt mit einem Fluid, so daß der Fluiddruck an der Unterkante  $2g\rho_f r_p$  beträgt. Für die Radien, bei denen sich eine gefüllte Pore entleert, gilt dann:

$$2g\rho_f r_p - \frac{2\sigma_w^*}{r_p} \geq 0 \Leftrightarrow r_p \geq \sqrt{\frac{0,0742 \text{ Nm}^{-1}}{g\rho_f}} = 2,75 \text{ mm.}$$

### 2.3.3 Berechnung der Fluidsättigung

Mit dem Kriterium  $p_k - p_h > 0$  ist durch Gleichung (2.33) dann der Porenradius  $r_p$  definiert, für den ein Gleichgewicht zwischen den Kräften herrscht. Demnach existiert eine scharfe Trennung zwischen kleineren gefüllten und größeren leeren Poren. Bei dieser Überlegung wurde aber lediglich eine einzelne Pore betrachtet, während in einem Gefüge mehrere Poren miteinander verbunden sind. Daher müssen die Kapillardrücke der angrenzenden Poren dahingehend berücksichtigt werden, daß eine zentrale Pore dann fluidgefüllt bleibt, wenn ihr Kapillardruck größer ist als der hydrostatische Druck minus des Kapillardruckes jeder einzelnen umgebenden Pore. Daraus folgert, daß jede umgebende Pore einen größeren Radius besitzen muß, damit die zentrale Pore beim Austrocknen des Gefüges gefüllt bleibt. Die Porenradienverteilung bestimmt also die minimale „irreduzible“ Sättigung, die durch ein Austrocknen erreicht werden kann.

Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, daß eine Pore mit  $r_p$  von  $c_p$  Poren des Radius  $r_{a_i}$  mit  $r_p < r_{a_i}$  für alle  $i \in 1 \dots c_p$  umgeben ist

$$\mathcal{P}_{H(r_p)} = \left( 1 - \int_{r_p}^{\infty} \mathcal{P}_{N(r_a)} dr_a \right)^{c_p}. \quad (2.35)$$

Die Gleichungen (2.33, 2.35) beschreiben den Effekt der Kapillarität für die mikroskopische Größenordnung einzelner Poren. Um die makroskopischen Auswirkungen zu bestimmen, wird über alle Poren der unterschiedlichen Größen und deren Auftretswahrscheinlichkeit integriert. Unter Berücksichtigung der irreduziblen Sättigung und des an den Kornoberflächen adsorbierten Fluids durch Gleichung (2.32) kann folgende Gleichung zur Berechnung der Fluidsättigung  $S_w$  aufgestellt werden:

$$S_w = \frac{\int_0^{r_p'} r_p'^3 \mathcal{P}_{N(r_p)} dr_p + \int_{r_p'}^{\infty} (r_p^3 \mathcal{P}_{H(r_p)} + 3\alpha_p d_a r_p^2 (1 - \mathcal{P}_{H(r_p)})) \mathcal{P}_{N(r_p)} dr_p}{\int_0^{\infty} r_p^3 \mathcal{P}_{N(r_p)} dr_p}. \quad (2.36)$$

Nach einigen elementaren Umformungen und der Umrechnung eines Poren- in einen Kornradius erhält man eine Abhängigkeit von der Kornverteilungskurve:

$$S_w = m_k(r_k) + \int_{r_k}^{\infty} \left( \mathcal{P}_H(r_k') + \frac{3\alpha_p d_a}{r_k'} (1 - \mathcal{P}_H(r_k')) \right) \mathcal{P}_m(r_k') dr_k' \quad (2.37)$$

$$\text{mit } r_k = \left( \frac{\phi}{1 - \phi} \right)^{\frac{1}{3}} \frac{0,1484 \text{ Nm}^{-1}}{p_h}.$$

Gleichung (2.37) verdeutlicht die direkte Abhängigkeit der Wassersättigung vom hy-

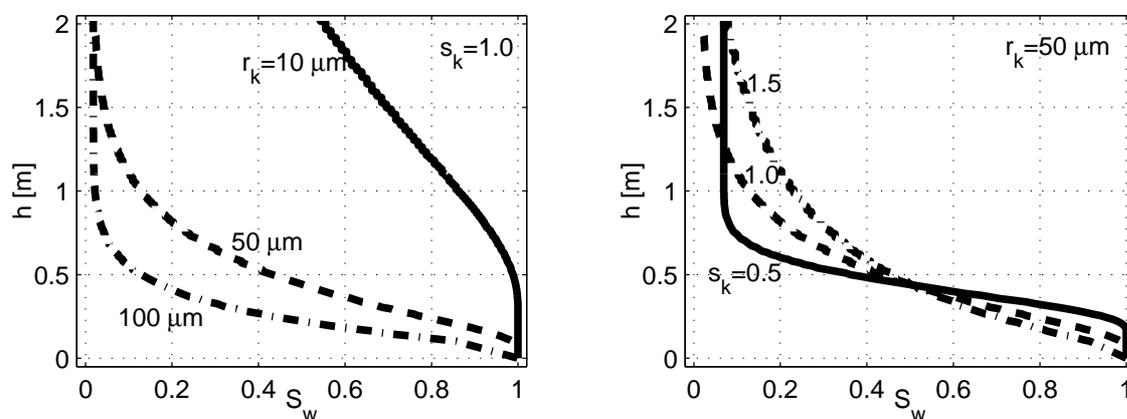


Abbildung 2.12: Sättigungskurven in Abhängigkeit vom mittlerem Kornradius  $r_k$  und der Verteilungsbreite  $s_k$ .

drostatischen Druck und der Korngrößenverteilung. In Abbildung 2.12 werden die nach dieser Gleichung berechneten Sättigungskurven für Gefüge mit den mittleren Kornradien  $r_k = 10, 50$  und  $100 \mu m$ , sowie für die Verteilungsbreiten  $s_k = 0,5, 1,0$  und  $1,5$  gezeigt. Der Anschaulichkeit halber wird anstelle des hydrostatischen Druckes die äquivalente Höhe der Wassersäule angegeben, um abschätzen zu können, innerhalb welcher Bereiche eine Beeinflussung der Fluidsättigung durch die Kapillarkräfte zu erwarten ist.

### 2.3.4 Permeabilität eines Sedimentes

Während die Geometrie des Untergrundes als zeitlich konstant betrachtet werden kann, ist die Art und Quantität der Porenfüllung variabel. Die hohe Mobilität der Fluide führt zu einer zeitlichen Variation der vom Sättigungsgrad abhängigen geophysikalischen Parameter. Daher ist das Fließverhalten von Fluiden durch den Porenraum von großem Interesse. Die Grundlage der folgenden Betrachtungen sind die Versuche Henry Darcys zum Fließverhalten von Wasser durch Sandfilter. Die Ergebnisse dieser Versuche faßte Darcy (1856)

zu der nach ihm benannten Formel

$$\frac{dV_f}{dt} = \frac{\kappa_h A_q}{g \varrho_f} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (2.38)$$

zusammen. Die Durchflußmenge als Volumen pro Zeiteinheit ist proportional zum Druckgefälle zwischen den Enden des durchflossenen Körpers entlang des Weges  $x$ . Der Proportionalitätsfaktor setzt sich dabei aus der Querschnittsfläche der Probe  $A_q$ , der Gravitationsbeschleunigung  $g$ , der Dichte des Fluids  $\varrho_f$  und einer Konstanten  $\kappa_h$ , der hydraulischen Leitfähigkeit, zusammen. Wie schon in den vorhergehenden Abschnitten sollen die durch die Darcy-Formel beschriebenen makroskopischen Eigenschaften eines Sandkörpers mit Hilfe von Betrachtungen im mikroskopischen Maßstab erklärt werden. In diesem Fall wird angenommen, daß der Fluidfluß durch den Porenraum durch das Gesetz von Hagen-Poiseuille für die laminare Rohrströmung adäquat beschrieben werden kann. Das heißt, daß sich in einer als Zylinder approximierten Wegsamkeit des Porenraumes ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil  $v_f(r) = \frac{(r_p-r)^2}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$  ausbildet. Das Fluid wird dabei im Zentrum des Zylinders am schnellsten transportiert, während es an den Porenwänden haften bleibt. Damit folgt:

$$\frac{dV_f}{dt} = \int_0^{r_p} 2\pi \alpha_p r' v_f(r') dr' = \frac{\pi \alpha_p}{8\eta} r_p^4 \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (2.39)$$

Für die Berechnungen in Abschnitt 2.2.4 wurde der Parameter  $\alpha_p$  eingeführt, um die Diskrepanz zwischen der Oberfläche der volumenäquivalenten Kugel mit Radius  $r_p$  und der tatsächlichen Oberfläche der Pore zu quantifizieren. Erfolgt ein zweidimensionaler Schnitt durch das Gefüge, so vergrößert sich der Umfang des betrachteten Zylinders in Gleichung (2.39) um  $\alpha_p$ . Durch die Kombination der Formel von Darcy (2.38) und des Hagen-Poiseuille-Gesetzes (2.39) ist es möglich, die hydraulische Leitfähigkeit  $\kappa_h$  zu bestimmen. Es gilt:

$$\kappa_h = \frac{\pi g \varrho_f \alpha_p}{8\eta A_q} r_p^4. \quad (2.40)$$

Ersetzt man die Probenquerschnittsfläche  $A_q$  durch den äquivalenten Ausdruck  $A_f/\phi$  und führt die Porenradien wie gewohnt auf die Massenverteilung der Körner zurück, so ergibt sich nach einigen Umformungen :

$$\kappa_h = \frac{g \varrho_f \alpha_p}{8\eta} \frac{\phi^{5/3}}{(1-\phi)^{2/3}} \int_0^\infty r_k \mathcal{P}_m(r_k) dr_k \left[ \int_0^\infty \frac{1}{r_k} \mathcal{P}_m(r_k) dr_k \right]^{-1}. \quad (2.41)$$

Weitere Vereinfachungen der Gleichung (2.41) hängen von der Kornradienverteilung ab. Die in Gleichung (2.1) definierte Kornverteilung besitzt die Eigenschaft, daß die hydraulische Leitfähigkeit unabhängig von der Verteilungsbreite  $s_k$  ist. Somit kann Gleichung

(2.41) zur wohlbekanntenen Kozeny–Carman–Gleichung

$$\kappa_h = \frac{g \rho_f \alpha_p}{8 \eta} \frac{\phi^{5/3}}{(1 - \phi)^{2/3}} r_{k,50}^2 \quad (2.42)$$

vereinfacht werden. Dabei ist anzumerken, daß der Faktor  $\frac{\alpha_p}{8}$  in Abhängigkeit von der kritischen Porosität sehr gut mit dem durch Carman (1937) experimentell bestimmten Wert von  $\frac{1}{5}$  übereinstimmt. Statt der hydraulischen Leitfähigkeit wird auch die Permeabilität

$$\kappa_p = \frac{\eta}{g \rho_f \kappa_h} \quad (2.43)$$

zur Charakterisierung angegeben. Da die Permeabilität um die Eigenschaften des Fluids bereinigt ist, hängt ihr Wert nur von den Eigenschaften der Gesteinsmatrix ab.

Bei der obigen Herleitung der Leitfähigkeit wurde angenommen, daß der Porenraum vollständig gesättigt ist. Mit abnehmender Sättigung wird auch die hydraulische Leitfähigkeit sinken, da immer weniger Porenkanäle zum Durchfluß zur Verfügung stehen. Die Situation ist theoretisch nur schwer zu beschreiben, weshalb man auf experimentell ermittelte Formeln zurückgreift. Folgende einfache und von weiteren Parametern unabhängige Formel wurde von Irmay (1954) gefunden:

$$\kappa_h(S_w) = \kappa_{h(1)} \left( \frac{S_w - S_i}{1 - S_i} \right)^3 \quad (2.44)$$

Danach wird die durch Gleichung (2.41) berechnete hydraulische Leitfähigkeit  $\kappa_{h(1)}$  für eine gesättigte Probe durch einen Faktor erweitert, der von der Sättigung  $S_w$  und der irreduziblen Sättigung  $S_i$  abhängig ist.

## 2.4 Der elektrische Widerstand des Gefüges

Die in dieser Arbeit betrachteten Materialien der Gefügematrix sind schlechte Leiter mit einem hohen spezifischen Widerstand von  $\rho > 10^6 \Omega\text{m}$ . Für die Leitfähigkeit des Gesteins zeichnen daher die Eigenschaften des Porenraumes verantwortlich, das heißt in diesem Falle die Porosität  $\phi$ , der Sättigungsgrad der Poren  $S_w$  und der spezifische elektrische Widerstand  $\rho_f$  des Porenfluids, abhängig von der Art und Konzentration der gelösten Ionen. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen und dem meßbaren spezifischen Widerstand wurde für poröse Gesteine zuerst von Smith–Rose (1934) und Archie (1942) untersucht. Das wesentliche Ergebnis dieser Arbeiten ist die bekannte empirische Formel von Archie:

$$\rho = \rho_f \phi^{-m_a} S_w^{-n_a} \quad (2.45)$$

Die Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstands einer Probe von der Porosität  $\phi$  und der Sättigung  $S_w$  des Porenraumes wurde dabei als durch ein Potenzgesetz

beschreibbar angenommen. Dabei sind die Exponenten  $m_a$  und  $n_a$  empirisch zu bestimmen. Für Sande und Sandsteine wurde für den Zementationsexponent  $1,3 \leq m_a \leq 2,5$  und für den Sättigungsexponent  $1,7 \leq n_a \leq 2,8$  ermittelt. Der Sättigungsexponent  $n_a$  ist dabei umso kleiner, je breiter die Kornradienverteilungskurve ist.

Die Verwendung empirischer Formeln als Grundlage zur Modellierung synthetischer Daten, insbesondere innerhalb eines Inversionsalgorithmus, ist allerdings heikel. Da die genauen Zusammenhänge zwischen den Parametern  $m_a$ ,  $n_a$  und den einzelnen Gefügeparametern nicht genau bekannt sind, ist eine Anwendung nur in den Fällen möglich, in denen schon eine breite Datenbasis besteht, aus der diese Parameter bestimmt werden können. Diese sind dann teilweise nur für eine spezielle Art von Gesteinen, oder auch nur für eine bestimmte Formation, d.h. lokal eingeschränkt, gültig. Die Übertragung auf andere Untersuchungsgebiete ist in der Regel nicht möglich. Die theoretische Behandlung des Problems gestaltet sich indes sehr schwierig. Zwar konnten Sen et al. (1981) in der Theorie und De la Rue & Tobias (1959) durch Experimente  $m_a = \frac{3}{2}$  für zufällige Kugelanordnungen bei Porositäten  $\phi > 0,60$  nachweisen, ein exaktes Verständnis und eine analytische Formulierung dieser Zusammenhänge konnte für geologisch realistische Materialien bisher aber noch nicht erreicht werden.

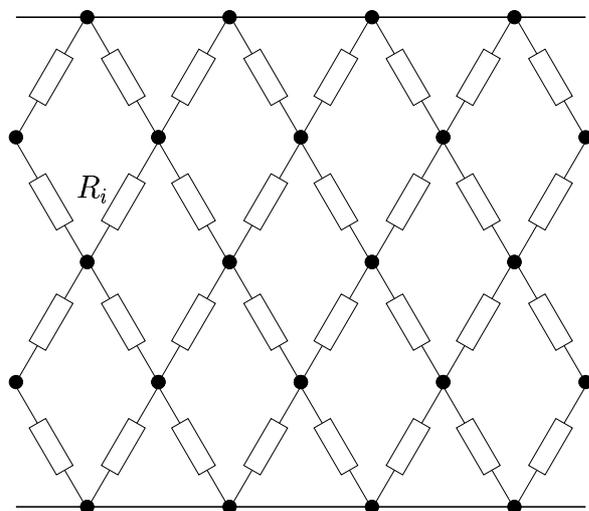


Abbildung 2.13: Aufbau eines Widerstandnetzwerks

Durch zahlreiche numerische Experimente anhand von Netzwerkmodellen wurde versucht, die empirische Archie-Formel auf eine nachvollziehbare theoretische Grundlage zu stellen. Ausgehend von anfänglich einfachen Widerstandsnetzwerken, wie das nebenstehend Abgebildete, die Schopper (1966) verwendete, wurden weiter verfeinerte Methoden entwickelt. Zum Beispiel bei der Untersuchung von Kugelverteilungen durch Roberts et al. (1985) und der Betrachtung dreidimensionaler Netzwerke, deren elektrisches Verhalten bei Veränderung der Sättigung von Suman et al. (1997) modelliert wurde. Allen Bemühungen gemein ist zum einen die Validierung der Gleichung (2.45) und zum anderen eine verbesserte Vorhersage der elektrischen Eigenschaften eines Gefüges.

Zur praktischen Berechnung des Einflusses der Fluidsättigung auf den spezifischen Widerstand des Gefüges werden die einzelnen Widerstände des in Abbildung 2.13 gezeigten Netzwerkes nach der numerischen Häufigkeit und der Sättigungswahrscheinlichkeit der einzelnen Poren und deren Widerstand belegt. Der Widerstand einer einzelnen Pore wird unter Annahme einer zylindrischen Geometrie berechnet, so daß für eine gesättigte Pore

gilt:

$$R_i = \rho_f l / A_q = \frac{\sqrt[3]{3} \rho_f}{\sqrt[3]{2} \pi r_p}. \quad (2.46)$$

Dabei sind  $l$  die Länge und  $A_q$  die Querschnittsfläche der Pore. Eine leere Pore besitzt durch das an den Kornpartikeln adsorbierte Wasser eine geringe restliche Leitfähigkeit, so daß in Abhängigkeit von der Anzahl  $N_m$  der monomolekularen Wasserschichten gilt:

$$R_i = \frac{\sqrt[3]{3} \rho_f}{\sqrt[3]{2} \pi N_m 0,35 \cdot 10^{-9} \text{m}}. \quad (2.47)$$

Der resultierende Widerstand des Netzwerkes wird mit Hilfe der Kirchhoffschen Knoten- und Maschenregel berechnet (Madden (1976)). Für ein Gefüge mit einem mittleren Kornradius von  $50 \mu\text{m}$  und einer Porosität von  $0,20$  zeigt Abbildung 2.14 die Abhängigkeit des spezifischen elektrischen Widerstandes von der Wassersättigung. In der doppeltlogarithmischen Darstellung zeichnet sich die Gültigkeit von Archies Formel durch Geraden aus. So existieren für hohe und mittlere Sättigungen Abschnitte in denen der funktionale Zusammenhang durch Geraden approximiert werden kann. Allerdings wird auch deutlich, daß das Verhalten eines Gefüges nicht über den gesamten Sättigungsbereich durch die Archie-Formel beschrieben werden kann.

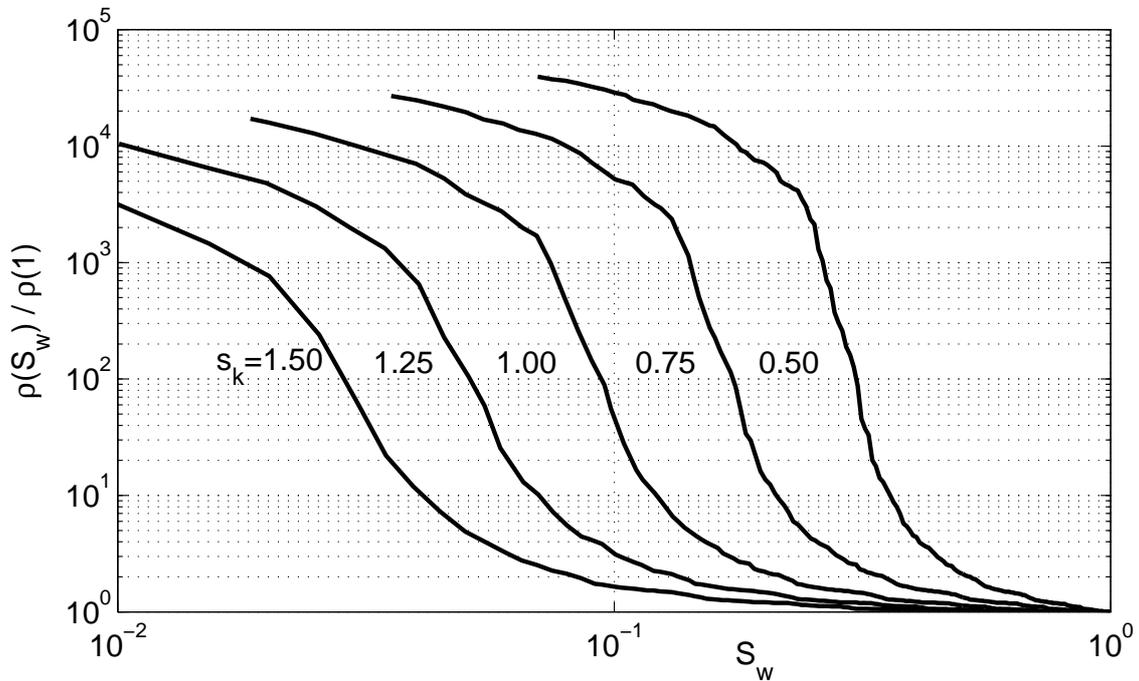


Abbildung 2.14: Der spez. Widerstand ungesättigter Gefüge relativ zum spez. Widerstand bei vollständiger Sättigung abhängig von der Kornverteilungsbreite  $s_k$ .

## 2.5 Vergleich mit experimentellen Daten

Nachdem in den letzten Abschnitten ein Gesteinsmodell vorgestellt wurde, soll in diesem Abschnitt überprüft werden, inwieweit die Modellvorstellungen mit experimentellen Daten in Einklang stehen. Für die Überprüfung der elastischen Eigenschaften werden zunächst Messungen von  $v_P$ ,  $v_S$  und  $\rho_c$  mit unterschiedlichen Werten für  $\phi$ ,  $p$  und  $S_w$  benötigt. Ein Datensatz aus ungefähr 450 einzelnen Messungen wurde aus veröffentlichten Ergebnissen von Domenico (1977), Gregory (1976), Han et al. (1986), Murphy et al. (1993), Tosaya & Nur (1982), Winkler (1985), Wyllie et al. (1956) und Wyllie et al. (1958) zusammengestellt. Bei den gemessenen Proben handelt es sich um Sandsteine und Sande mit einem Tongehalt von weniger als 15 Prozent oder Gläsern und Sinter aus reinem Quarz.

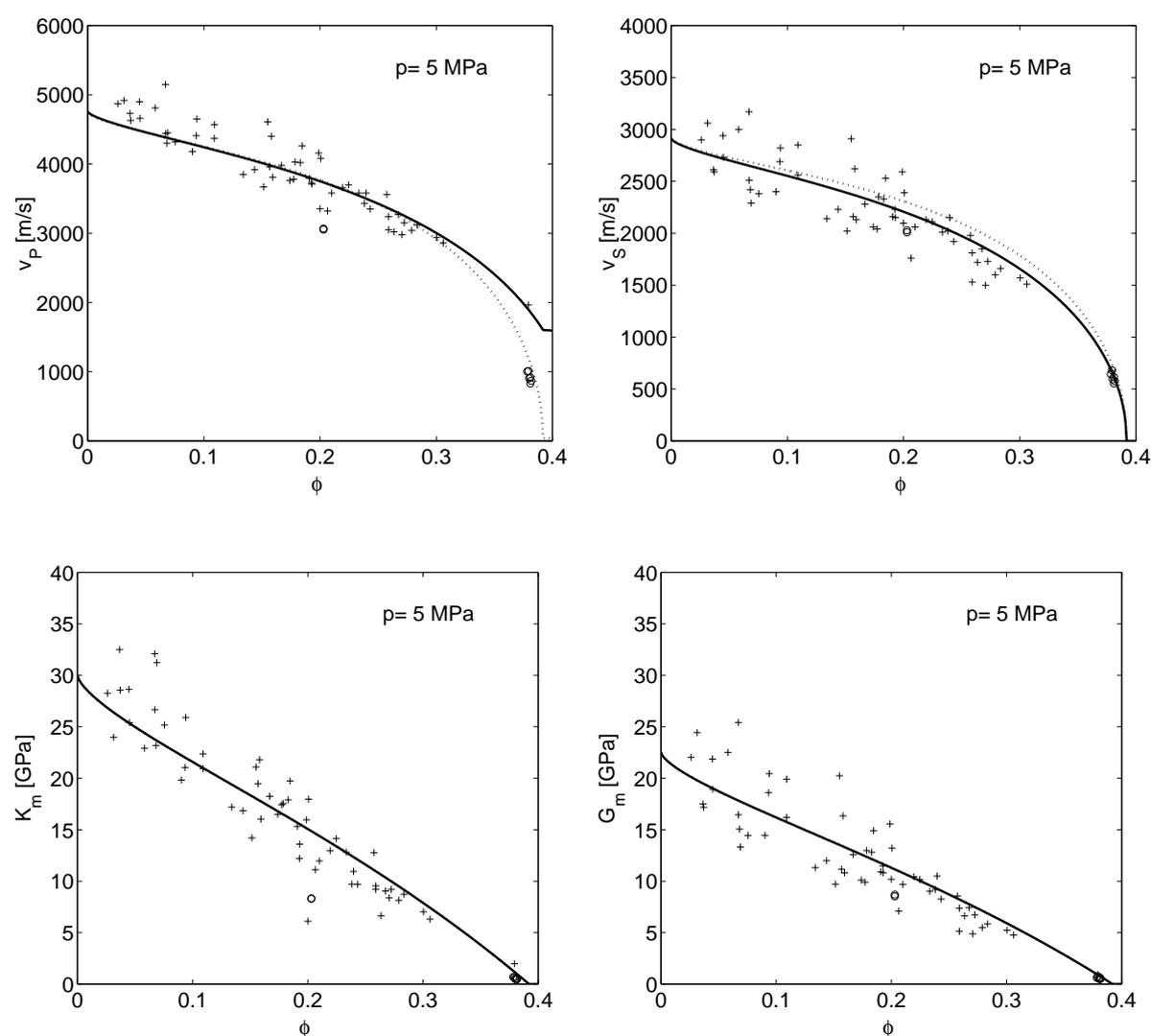


Abbildung 2.15: Daten aus Experimenten mit einem Druck von 5 MPa. Siehe auch die Beschreibung zu Abbildung 2.17.

$p$ MPa	$K_0$ GPa	$\rho_s$ kg/m <sup>3</sup>	$\mu_m$	$r_k$ m	$s_k$	$\alpha_p$	$\phi_c$	relativer Fehler in %				
								$G_m$	$K_m$	$\rho_c$	$v_P$	$v_S$
5	30	2650	0.20	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.34	0.391	19,4	25,4	2,4	8,2	10,4
10	35	2650	0.20	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.34	0.389	17,5	23,7	2,4	5,9	8,6
20	38	2650	0.19	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.34	0.391	15,9	16,9	2,0	5,2	8,1
30	37	2650	0.17	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.34	0.391	15,5	20,4	2,5	5,8	7,5
40	35	2650	0.17	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.35	0.389	17,2	19,5	2,1	6,6	9,2
50	37	2650	0.11	10 <sup>-3</sup>	0.5	1.46	0.361	15,7	14,3	0,2	8,2	8,6

Tabelle 2.1: Für die Anpassungen in den Abbildungen 2.15–2.17 verwendete Parameter.

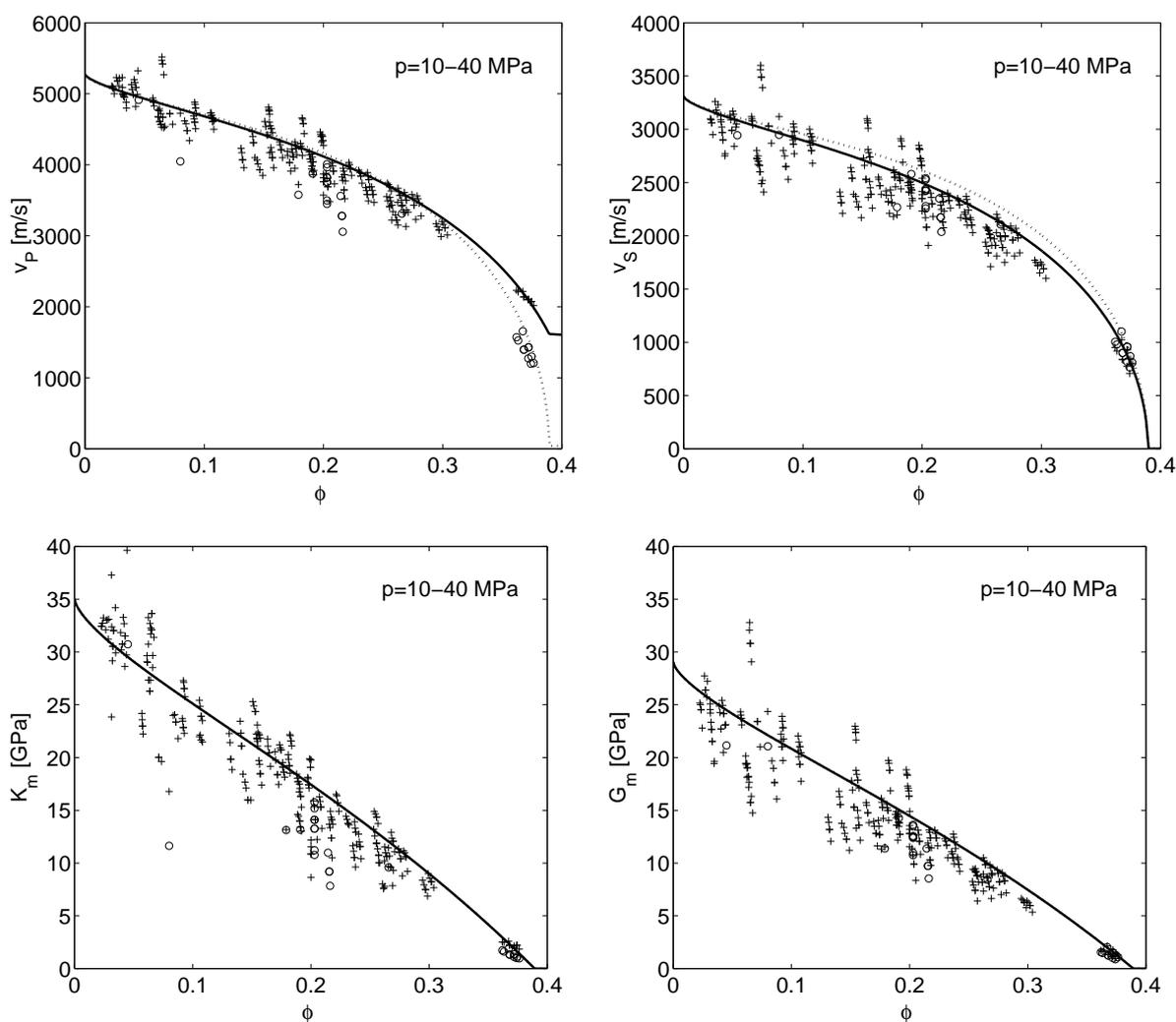


Abbildung 2.16: Daten aus Experimenten mit einem Druck von 10–40 MPa. Siehe auch die Beschreibung zu Abbildung 2.17.

Die Abbildungen 2.15, 2.16 und 2.17 zeigen die gemessenen elastischen Geschwindigkeiten bzw. die daraus ermittelten Moduln in Abhängigkeit von der Porosität unter jeweils unterschiedlichen Umgebungsdrücken. Diese Daten werden mit Hilfe des in diesem Kapitel entwickelten Modells angepaßt. Die dazu benutzten Parameter sind in Tabelle 2.1 zusammengestellt.

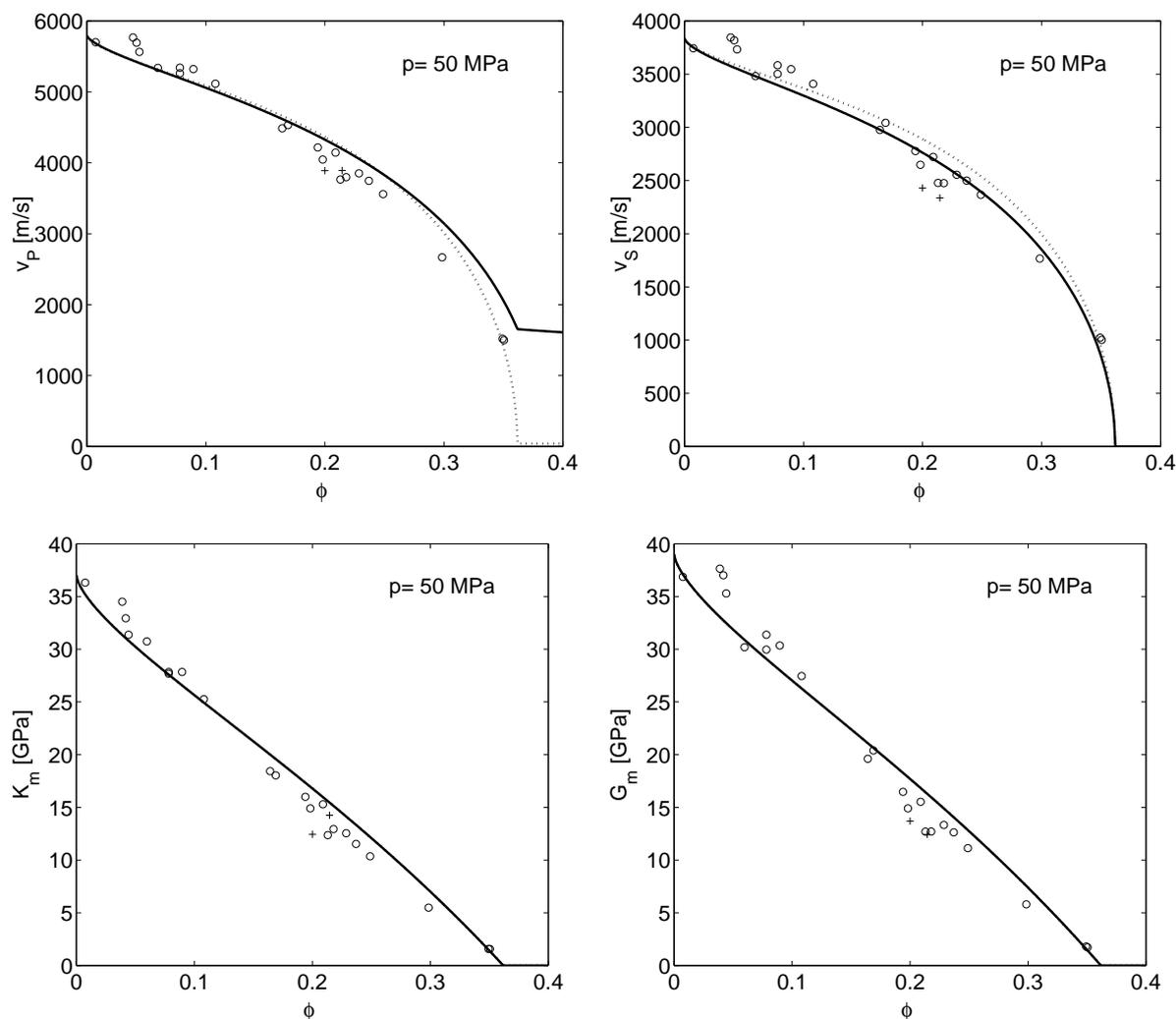


Abbildung 2.17: Daten aus Hochdruck-Experimenten. In den Abbildungen 2.15 bis 2.17 sind die Messungen wassergesättigter (trockener) Proben mit  $+$  ( $\circ$ ) gekennzeichnet und die entsprechende theoretische Kurve mit einer durchgezogenen (gepunkteten) Linie dargestellt. Dargestellt sind jeweils *oben links* die Kompressionswellengeschwindigkeit  $v_P$ , *oben rechts* die Scherwellengeschwindigkeit  $v_S$ , *unten links* der Kompressionsmodul  $K_m$  und *unten rechts* der Schermodul  $G_m$ , jeweils in Abhängigkeit von der Porosität  $\phi$ .

Im rechten Teil der Tabelle 2.1 befinden sich die bei der Anpassung resultierenden relativen Fehler  $e_r$  in Prozentpunkten, die nach

$$e_r = 100 \left( \frac{1}{N} \sum_i^N \left( \frac{d_i - d_i^*}{d_i} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.48)$$

berechnet wurden, wobei  $d_i$  die vorhergesagten und  $d_i^*$  die gemessenen Observablen bezeichnen. Anhand dieser Resultate kann man konstatieren, daß das hergeleitete Modell das physikalische Verhalten verschiedener Gesteine recht gut beschreibt. Hervorzuheben ist dabei, daß der von der Anschauung her eingeführte Parameter  $\alpha_p$  über einen großen Bereich nicht verändert werden muß. Die Abweichung dieses Parameters für die Daten für Gesteine unter 50 MPa Druck ist möglicherweise dadurch erklärbar, daß diese Versuche überwiegend an Gefügen aus künstlichen Materialien durchgeführt wurden.

Um die Gültigkeit der Archie-Formel zu überprüfen bzw. die Werte für den Zementationsfaktor und den Sättigungsfaktor zu ermitteln, wurden zahlreiche Versuche an Sandsteinproben durchgeführt. Die in Abbildung 2.18 dargestellten Daten wurden aus den Publikationen von Wong et al. (1984), Roberts et al. (1985), Doyen (1988), Taherian et al. (1990) und Knight (1991) entnommen. Zur Abschätzung der Werte, welche die Exponenten in Gleichung (2.45) annehmen können, wurden die Ergebnisse doppeltlogarithmisch aufgetragen.

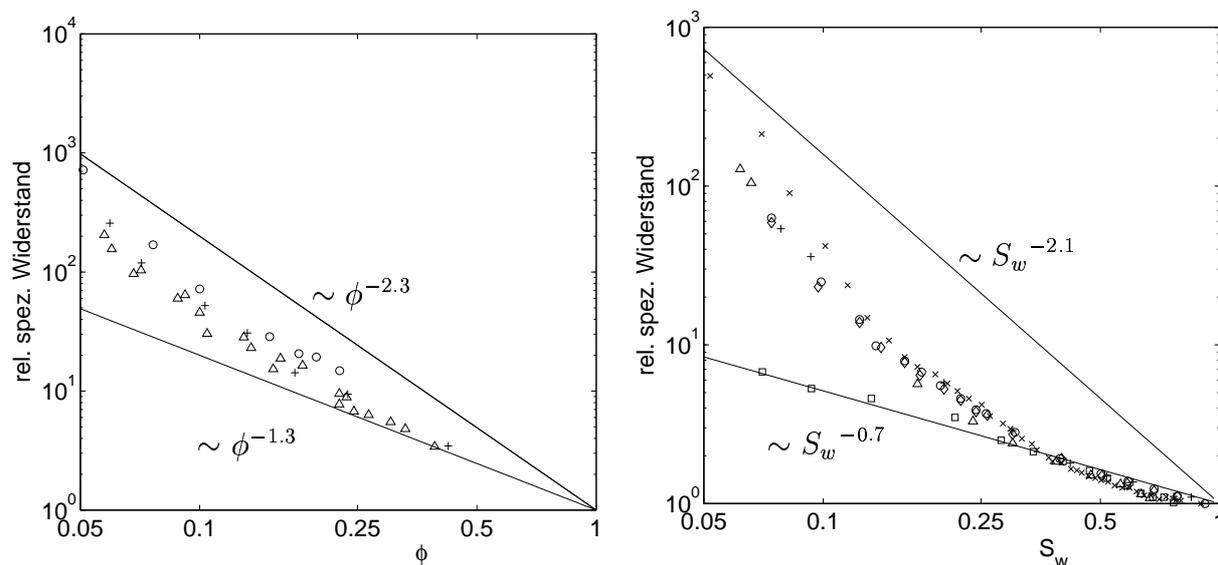


Abbildung 2.18: Ergebnisse von Untersuchungen des geoelektrischen Verhaltens von Sandsteinen. *Links*: Die Abhängigkeit des spez. elektr. Widerstands von der Porosität und *rechts* die Abhängigkeit von der Fluidsättigung.

Um die Messungen an den unterschiedlichen Proben miteinander vergleichen zu können, wurden die Meßwerte in geeigneter Weise normiert. Die durch die Archie-Formel gegebenen Schranken wurden als Linien der Abbildung hinzugefügt. Der Zementationsexponent wurde auf den Bereich  $1.3 \leq m_a \leq 2.3$  und der Sättigungsexponent auf das Intervall  $0.7 \leq n_a \leq 2.1$  eingeschränkt.

Wie aus Abbildung 2.18 ersichtlich wird, läßt sich die Abhängigkeit des spez. elektrischen Widerstands gut durch ein Potenzgesetz beschreiben. Eine systematische Abweichung von dem Verhalten, das durch die Archie-Formel vorhergesagt wird ist nicht zu erkennen. Im Gegensatz dazu wird der funktionale Zusammenhang zwischen Widerstand und Fluidsättigung durch die Archie-Formel nur sehr schlecht erklärt. Einzig die in Abbildung 2.18 durch Quadrate gekennzeichnete Probe eines Berea Sandsteins kann durch sie adäquat beschrieben werden. Alle anderen Proben zeigen ein Verhalten, wie es in Abschnitt 2.4 durch Berechnungen mittels eines Widerstandnetzwerkes vorhergesagt wird (siehe auch Abbildung 2.14).

Der Übersicht halber sind in der Tabelle 2.2 noch einmal alle für die konkreten Berechnungen benötigten physikalischen Eigenschaften des Kornmaterials, des Porenfluids und der gasförmigen Phase zusammengefaßt.

<b>Kornmaterial</b>			
Kompressionsmodul von Quarz	$K_s$	$37,3 \cdot 10^9$	Pa
Schermodul von Quarz	$G_s$	$44,3 \cdot 10^9$	Pa
Poissonzahl von Quarz	$\mu_s$	0,075	
Dichte von Quarz	$\varrho_s$	2650	kg/m <sup>3</sup>
<b>Porenfluid</b>			
Kompressionsmodul von Wasser	$K_f$	$2,25 \cdot 10^9$	Pa
Dichte von Wasser	$\varrho_f$	998	kg/m <sup>3</sup>
Viskosität von Wasser, 20°C	$\eta$	$1,025 \cdot 10^{-3}$	Pa s
Spez. elektr. Widerstand von Wasser	$\rho_f$	0,1–10	$\Omega$ m
<b>Porengas</b>			
Kompressionsmodul von Luft	$K_g$	$10^5$	Pa
Dichte von Luft	$\varrho_g$	0,85	kg/m <sup>3</sup>
Viskosität von Luft, 0,1MPa, 0°C	$\eta$	$1,74 \cdot 10^{-5}$	Pa s
<b>weitere Parameter</b>			
Spez. Oberflächenspannung eines Quarz-Wasser-Luft-Kontaktes	$\sigma_w^*$	$7,42 \cdot 10^{-2}$	N m <sup>-1</sup>
Kritische Porosität	$\phi_c$	0,39	

Tabelle 2.2: Die in dieser Arbeit verwendeten Materialparameter.

## 2.6 Zusammenfassung

Ausgehend von einer einfachen geometrischen Beschreibung eines Gefüges als regellose Anordnung einzelner kugeligter Körner, wurden die verschiedenen physikalischen Eigenschaften eines Probekörpers hergeleitet. In Abschnitt 2.2 wurden die seismischen Geschwindigkeiten für trockene und feuchte Gefüge berechnet. Dabei wurden zahlreiche Größen, die für das Verständnis der mikroskopischen Eigenschaften nötig waren, aber praktisch nicht zu bestimmen sind, in geeigneter Weise zusammengefaßt, um die makroskopische Beschreibung zu vereinfachen. Dabei werden die elastischen Eigenschaften trockener Gefüge durch die Gleichungen (2.17), (2.20) und (2.25) beschrieben. Ist zusätzlich ein Porenfluid zu berücksichtigen, so sind zusätzlich die Gleichungen (2.26), (2.30) und (2.31) anzuwenden. Im weiteren wurde der charakteristische Einfluß des Porenfluids herausgearbeitet, welches im wesentlichen nur die P-Wellengeschwindigkeit beim Übergang zur vollständigen Sättigung beeinflußt. Sind durch geeignete Erkundungsmethoden Informationen sowohl über die S- als auch die P-Wellengeschwindigkeit verfügbar, so eröffnet sich die Möglichkeit die Einflüsse von Korngerüst und Porenraum zu separieren. Der spezifische elektrische Widerstand eines Gefüges wurde in Abschnitt 2.4, durch eine ähnliche Verfahrensweise wie die elastischen Parameter, hergeleitet. Hier wurde konstatiert, daß der elektrische Widerstand von Gefügen vor allem von den geometrischen Eigenschaften des Porenraumes sowie der Fluidsättigung abhängt.

Um seismische und elektrische Messungen miteinander zu verknüpfen, sind gemeinsame Parameter für beide Methoden nötig. In der in diesem Kapitel dargestellten Betrachtungsweise sind dies die Porosität  $\phi$  und die Fluidsättigung  $S_w$ , welche die drei meßbaren Größen  $v_P$ ,  $v_S$  und  $\rho$  auf sehr unterschiedliche Weise beeinflussen. Demnach werden gemeinsame Schichtgrenzen durch eine Änderung der Porosität oder durch eine Grundwasseroberfläche definiert. Diese führen nach den Erkenntnissen aus Abschnitt 2.3 nicht zu gleich lokalisierten Schichtgrenzen der elastischen und elektrischen Parametern, eine Vorhersage, die mit Beobachtungen in der Natur in Einklang steht.

# Kapitel 3

## Modellierung

Die Ergebnisse des letzten Kapitels ermöglichen es, Vorhersagen über die physikalischen Parameter von Böden und Gesteinen in den Dimensionen eines zentimetergroßen Probestkörpers zu machen. Es ist aber in den meisten Fällen aufgrund der entstehenden Kosten, Bebauung oder sonstiger Einschränkungen nicht möglich, an der gewünschten Stelle in der erforderlichen Tiefe Proben zu entnehmen oder Messungen in situ durchzuführen. Daher ist man darauf angewiesen, aus geophysikalischen Messungen an der Erdoberfläche Rückschlüsse auf den Untergrund zu ziehen, um so ein lückenhaftes Bild der Geologie zu vervollständigen. Um sowohl die Geometrie als auch die physikalischen Gesteinsparameter erfassen zu können, ist es im allgemeinen erforderlich, mehrere geophysikalische Methoden anzuwenden. Dabei muß das physikalische Verständnis jeder einzelnen eingesetzten Meßmethode soweit gediehen sein, daß man anhand der geometrischen Verteilung der physikalischen Parameter im Raum die zu erwartenden Meßwerte in der Natur vorhersagen kann.

Dieser Vorgang, aus bekannten Parametern Meßgrößen zu berechnen, heißt Modellierung. Aufgrund der Zielsetzung dieser Arbeit sollen die Methoden der Geoelektrik, der Refraktionsseismik und der Oberflächenwellenseismik angewendet werden. Die Methode der Reflexionsseismik ist für die hier untersuchten geringen Tiefen nicht geeignet. Im ersten Abschnitt 3.1 sollen zunächst die Anforderungen an die Geometrie der geologischen Schichtung definiert werden. Daraufhin wird im Abschnitt 3.2 die Dynamik der Fluide im Porenraum behandelt. Sie wird benötigt, um zusammen mit den Ergebnissen des letzten Kapitels die Verteilung der physikalischen Parameter im Untergrund zu bestimmen. Besonders sensitiv bezüglich der Fluidverteilung sind geoelektrische Verfahren. In Abschnitt 3.3 wird die für die Inversion benutzte Modellierung der geoelektrischen Sondierungen vorgestellt. Darauf folgt in den Abschnitten 3.4 und 3.5 die Beschreibung der eingesetzten Verfahren zur Berechnung der synthetischen Datensätze für die Refraktions- bzw. Oberflächenwellenseismik.

### 3.1 Die Geometrie des Untergrundes

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 2 ist es möglich, aus beliebigen Verteilungen der Gefügeparameter die entsprechende Verteilung der meßbaren physikalischen Größen zu berechnen. Die Modellierung beliebiger dreidimensionaler geologischer Strukturen bedingt aber einen so hohen zeitlichen Aufwand, daß die für eine Inversion benötigte Anzahl von Modellierungen nicht realisierbar ist. Zum grundlegenden Verständnis ist es zudem förderlich, zunächst einfache Modelle zu betrachten, bei denen der Einfluß einzelner Parameter leicht nachzuvollziehen ist. Alle Betrachtungen in dieser Arbeit beschränken daher die Geometrie der geologischen Strukturen auf ein eindimensionales Schichtmodell. Nur für diesen Fall ist es auch praktikabel, die Dispersionseigenschaften der Oberflächenwellen in einem vertretbaren Aufwand zu berechnen und so aus einer konventionellen refraktionsseismischen Messung Informationen über die Scherwellengeschwindigkeiten zu erhalten. Damit sind die Verfahren zunächst auf Situationen beschränkt in denen die Variation der einzelnen Parameter vor allem mit der Tiefe erfolgt. Die Abbildung 3.1 zeigt ein beispielhaftes geologisches Modell, das mit dieser Forderung konform ist. Geringe und kleinräumige laterale Veränderungen der Schichtmächtigkeiten sind je nach Auflösungsvermögen der eingesetzten Meßmethode und der Meßpunktdichte vernachlässigbar. Stetige Veränderungen der physikalischen Parameter in der Vertikalen, können mit Hilfe einer feinen Diskretisierung durch mehrere Schichten dargestellt werden. Ferner können leicht einfallende Strukturen in Streichrichtung durch eindimensionale Verfahren erkundet werden, wobei die zweidimensionale Struktur aus der gemeinsamen Interpretation mehrerer Meßprofile folgt (z.B. Gyulai & Ormos (1999)).

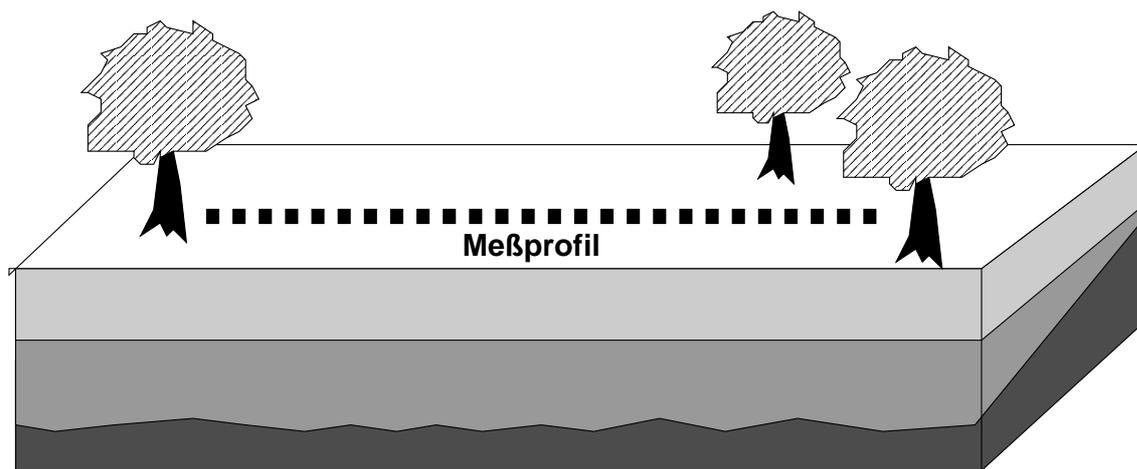


Abbildung 3.1: Geologisches Modell mit einer schiefer gelagerten ersten Schicht und einer leicht einfallenden kleinräumig gewellten zweiten Schicht. Unter Verwendung des gekennzeichneten Meßprofils gilt die eindimensionale Betrachtung für die erste Schicht exakt und für die zweite näherungsweise.

## 3.2 Dynamik der Fluide im Porenraum

Wie in Kapitel 2 deutlich wird, hängen alle physikalischen Parameter von der Verteilung des Fluids im Porenraum des Gesteins ab. Da diese zeitlich variiert, ist es notwendig, Kenntnis über die Dynamik des Fluids zu haben, die durch Diffusion im Porenraum, durch das gravitationsbedingte Einsickern, Regenfälle und Grundwasserab- oder zufluß bestimmt wird. Das zeitliche Verhalten der Sättigung  $S_w$  wurde durch Richards (1931) als Differentialgleichung formuliert:

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = \frac{1}{g \varrho_f} \nabla (\kappa_h \nabla p_h) - \frac{\partial \kappa_h}{\partial z}. \quad (3.1)$$

Dabei ist  $\kappa_h$  die hydraulische Leitfähigkeit,  $t$  die Zeit und  $z$  die Tiefenachse. In dieser Form der Gleichung sind schon zwei Vereinfachungen enthalten. Erstens die zeitliche Konstanz der Porosität und zweitens die Inkompressibilität des Fluids.

Die Richards-Gleichung läßt sich auf verschiedene Weise formulieren. Die hier gewählte Formulierung mit der Verwendung der räumlichen Ableitung des Porendruckes hat entscheidende Vorteile gegenüber Formulierungen, welche die räumliche Ableitung nach der Sättigung verwenden (vgl. Haverkamp & Vauclin (1981)). So kann durch diese Formulierung sowohl Fluß in einem gesättigten als auch ungesättigten Medium beschrieben werden. Ferner verhält sich der Druck an den Schichtgrenzen stetig, während die Sättigung dort unstetig ist.

Betrachtet man ein eindimensionales Modell, so lautet die Richards-Gleichung in Abhängigkeit von  $z$  :

$$g \varrho_f \phi \frac{\partial S_w}{\partial p_h} \frac{\partial p_h}{\partial t} = \frac{\partial \kappa_h}{\partial z} \frac{\partial p_h}{\partial z} + \kappa_h \frac{\partial^2 p_h}{\partial z^2} - g \varrho_f \frac{\partial \kappa_h}{\partial z}. \quad (3.2)$$

Für ein lineares Druckregime, wie es  $p_h = g \varrho_f z$  beschreibt, verschwindet die zweite Ableitung nach  $z$  und auf der rechten Seite der Gleichung steht 0, d.h., daß ein statischer Zustand besteht.

Das Einsickern von Wasser in trockene Böden ist schwierig zu modellieren, da aufgrund der geringen initialen Sättigung die hydraulische Leitfähigkeit nach Gleichung (2.44) sehr gering ist, was zu steilen Druckgradienten führt. Diese führen zu Instabilitäten bei der numerischen Ableitung, so daß diese über eine Umgebung der Tiefe  $z_0$  geglättet werden muß. Ähnliches gilt für sprunghafte Änderungen der hydraulischen Leitfähigkeit an einer Schichtgrenze. Dort kann  $\partial \kappa_h / \partial z$  nicht gebildet werden, weshalb ein geglätteter, stetig ableitbarer Übergang verwendet wird. Verfahren dazu werden in Haverkamp et al. (1977), Hills et al. (1989) und Gottardi & Venutelli (1992) beschrieben. Zudem ist die Beziehung zwischen Sättigung und Druck höchst nichtlinear, weshalb eine feine Diskretisierung in Raum und Zeit notwendig ist.

### 3.3 1–D Geoelektrik

Das Problem der Modellierung einer Widerstandssondierung wurde durch Stefanescu et al. (1930) für ein 1D–Modell gelöst. In dieser Arbeit werden Sondierungen mit der Schlumberger–Auslage zur geoelektrischen Prospektion verwendet. Bei dieser Art der Messung wird dem Boden ein künstliches elektrisches Feld über zwei äußere Elektroden aufgebracht, während die entstehende Potentialdifferenz zwischen den zwei inneren Sonden gemessen wird.

Der scheinbare spezifische Widerstand  $\rho_{\text{app}}$  variiert in Abhängigkeit vom Abstand  $x$  der Stromelektroden zum Sondierungspunkt. Aufgrund der zylindrischen Symmetrie des ein-dimensionalen Problems, ist dieses durch die Integraltransformation

$$\rho_{\text{app}(x)} = \rho_1 x^2 \int_0^{\infty} \left(1 + 2\Theta(\zeta, \underline{\rho}, \underline{h})\right) \mathcal{J}_1(\zeta x) \, d\zeta \quad (3.3)$$

berechenbar, wobei  $\mathcal{J}_1(\zeta)$  die Bessel–Funktion erster Ordnung ist. Dabei beinhaltet die Kernfunktion  $\Theta(\zeta, \underline{\rho}, \underline{h})$  die Abweichungen von der Lösung des Problems für den Halbraum. In die Kernfunktion fließen die Informationen über die spez. Widerstände  $\underline{\rho}$  und die Mächtigkeiten  $\underline{h}$  der einzelnen Schichten ein. Für  $N - 1$  Schichten über einem Halbraum läßt sich die Stefanescu Kernfunktion für die Erdoberfläche rekursiv berechnen. Ausgehend vom Halbraum mit dem Schichtindex  $N$  und der Kernfunktion  $\Theta_N(\zeta) = 0$  wird sukzessive eine Schicht  $i$  auf die bisherige Schichtfolge addiert, wobei der Einfluß der neuen Schicht mit der Mächtigkeit  $h_i$  und dem spez. Widerstand  $\rho_i$  durch

$$\Theta_i(\zeta) = \left[ \left( \frac{\rho_{i+1} - \rho_i}{\rho_{i+1} + \rho_i} \Theta_{i+1}(\zeta) \right)^{-1} + 1 \right]^{-1} \cdot e^{-2\zeta h_i} \quad (3.4)$$

gegeben ist. Der spez. Widerstand wird innerhalb einer Schicht als konstant angenommen. Um Modelle mit einem Widerstandsgradienten effektiv berechnen zu können, entwickelten Kim & Lee (1996) ein Verfahren, das die Gleichungen (3.3) und (3.4) für den Fall erweitert, daß sich der spez. Widerstand innerhalb einer Schicht durch eine Exponentialfunktion beschreiben läßt. Gradienten, deren Verlauf sich nicht durch eine Exponentialfunktion approximieren lassen, müssen durch mehrere Schichten angenähert werden.

### 3.4 1–D Refraktionsseismik

Eine der wohl gebräuchlichsten Methoden zur Erkundung oberflächennaher Strukturen ist die Refraktionsseismik. Die Interpretation erfolgt aufgrund der relativ einfach zu bestimmenden Ersteinsatzzeiten des registrierten Wellenfeldes, also der Laufzeit der sich im Untergrund am schnellsten fortpflanzenden Wellenfront. Damit genügt diese Wellenfront

dem Fermat-Prinzip, so daß Laufweg und -zeit bei gegebener Geschwindigkeitsverteilung im Untergrund eindeutig festgelegt sind. Die Eindeutigkeit wird durch das Extremalprinzip des schnellsten Laufwegs  $\ell$ , mit

$$t = \int_{\ell} \frac{1}{v_P(\ell)} d\ell \stackrel{!}{=} \min \quad (3.5)$$

garantiert. Ziel der Modellierung ist es, die schnellsten Laufwege für ein gegebenes Geschwindigkeitsmodell, bei bekannter Position der seismischen Quelle, für alle interessierenden Geophonpositionen zu berechnen. Da man nur an den kinematischen Größen einer Wellenfront interessiert ist, wird man die Strahlenapproximation nutzen und die Wellenfront lokal als ebene Welle annähern. Prinzipiell bestehen nun zwei Möglichkeiten, die Laufzeiten zu berechnen: die des „ray-tracing“ wobei der Laufweg einzelner von der Quelle ausgehender Strahlen verfolgt wird, zum anderen die der Wellenfrontenverfahren, die für eine räumlich diskretisierte Geschwindigkeitsverteilung  $v_P(\ell)$  mit Hilfe der Eikonalgleichung lokal die Wellenfront propagieren.

Für den einfachen Fall von  $N$  söhlig gelagerten Schichten, wobei die  $N$ -te Schicht den Halbraum darstellt, lassen sich die Ersteinsatzzeiten leicht durch die Konstruktion der Strahlenwege mit Hilfe des Brechungsgesetzes von Snellius herleiten. Summiert man alle Längen der Teilwege von der Quelle zur  $j$ -ten Schicht und weiter zum Empfänger im Abstand  $x$  von der Quelle und dividiert die Längen durch die Wellengeschwindigkeiten  $v_{P_i}$  in den jeweiligen Schichten, so erhält man für die Laufzeit

$$t_j(x) = \frac{x}{v_{P_j}} + \frac{2}{v_{P_j}} \sum_{i=1}^{j-1} h_i \sqrt{v_{P_j}^2 - v_{P_i}^2} v_{P_i}^{-1}. \quad (3.6)$$

Für jede Entfernung gilt dann für die Ersteinsatzzeit

$$t(x) = \min \{t_j(x)\}. \quad (3.7)$$

### 3.5 Die zuverlässige Berechnung der Dispersionskurven von Rayleigh-Wellen

Im Gegensatz zu den in der Refraktionsseismik betrachteten Raumwellen ist die Laufzeit von Oberflächenwellen keine skalare Größe, sondern eine Anzahl von Funktionen in Abhängigkeit von der Frequenz, d.h. die Oberflächenwellen sind dispersiv. Je nach der Beschaffenheit des Untergrundes und dem Frequenzgehalt der anregenden Quelle können Oberflächenwellen aus mehreren Signalanteilen, sogenannten Moden, bestehen, die jeweils über individuelle Dispersionseigenschaften verfügen. Der funktionale Zusammenhang zwischen Ausbreitungsgeschwindigkeit und Frequenz wird für jede Mode durch ihre Dispersionskurve beschrieben. Die Berechnung der Dispersionskurven von Rayleigh-Wellen kann

mit dem von Thomson (1950) und Haskell (1953) formulierten Matrixalgorithmus erfolgen.

Das dem Verfahren zugrundeliegende Modell besteht aus  $N-1$  söhlig gelagerten Schichten über einem Halbraum, der wiederum mit der Schichtnummer  $N$  gekennzeichnet wird. Die obere Grenzfläche der 1. Schicht ist die freie Oberfläche der Erde. An den jeweiligen Grenzflächen zwischen den Schichten und an der freien Oberfläche müssen die Randbedingungen für die Wellenausbreitung erfüllt werden. Diese Randbedingungen sind die Stetigkeit der Normal- und Tangentialspannungen sowie der Horizontal- und Vertikalverschiebungen zwischen den Schichtpaketen, die Spannungsfreiheit an der freien Oberfläche und die vollständige Absorption im Halbraum. Die Verknüpfung zweier Grenzflächen durch das dazwischenliegende Schichtpaket erfolgt durch eine Matrix, in die beide seismischen Geschwindigkeiten  $v_P$  und  $v_S$ , die Dichte  $\rho_c$  und die Schichtmächtigkeit  $h$  einfließen.

Durch das Multiplizieren der einzelnen Schichtmatrizen zu einer Matrix  $\underline{\underline{H}}$ , werden die Randbedingungen des Halbraumes durch das aufliegende Schichtpaket hindurch mit den Randbedingungen an der freien Oberfläche verknüpft. Die durch die Matrix  $\underline{\underline{H}}$  definierten Randbedingungen sind an allen Schichtgrenzen für den Fall erfüllt, wenn gilt:

$$\mathcal{F}_R(\nu, k) = \frac{H_{3,2} - H_{4,2}}{H_{3,1} - H_{4,1}} - \frac{H_{1,2} - H_{2,2}}{H_{1,1} - H_{2,1}} = 0. \quad (3.8)$$

Neben den elastischen und geometrischen Parametern der Schichten gehen in die Matrix  $\underline{\underline{H}}$  sowohl die Frequenz  $\nu$  als auch die Wellenzahl  $k$  ein, welche hier als Kehrwert der Wellenlänge ohne den Faktor  $2\pi$  definiert ist. Die durch Gleichung (3.8) definierte sogenannte Haskell-Funktion  $\mathcal{F}_R(\nu, k)$  bildet eine implizite Funktion zwischen Frequenz und Wellenzahl. Liegt die Mächtigkeit des Schichtpaketes über dem Halbraum in der Größenordnung mehrerer Wellenlängen des betrachteten seismischen Signals, so neigt das Thomson-Haskell-Verfahren zu numerischen Fehlern bei der Bestimmung der Haskell-Funktion aufgrund der systembedingten endlichen Rechengenauigkeit (Schwab (1970)). Für sehr hohe Frequenzen und dementsprechend kurze Wellenlängen muß daher das zuverlässigere Verfahren von Schwab & Knopoff (1970) eingesetzt werden, was aber für die in dieser Arbeit betrachteten Modelle nicht nötig ist.

	$v_P$ [m/s]	$v_S$ [m/s]	$\rho_c$ [kg/m <sup>3</sup> ]	$h$ [m]
1. Schicht	250	115	1550	1,3
2. Schicht	840	112	1850	3,5
3. Schicht	1950	250	2300	8,0
Halbraum	2800	1600	2600	$\infty$

Tabelle 3.1: Das den Modellierungen in den Abbildungen 3.2 und 3.3 zugrundeliegende Schichtenmodell.

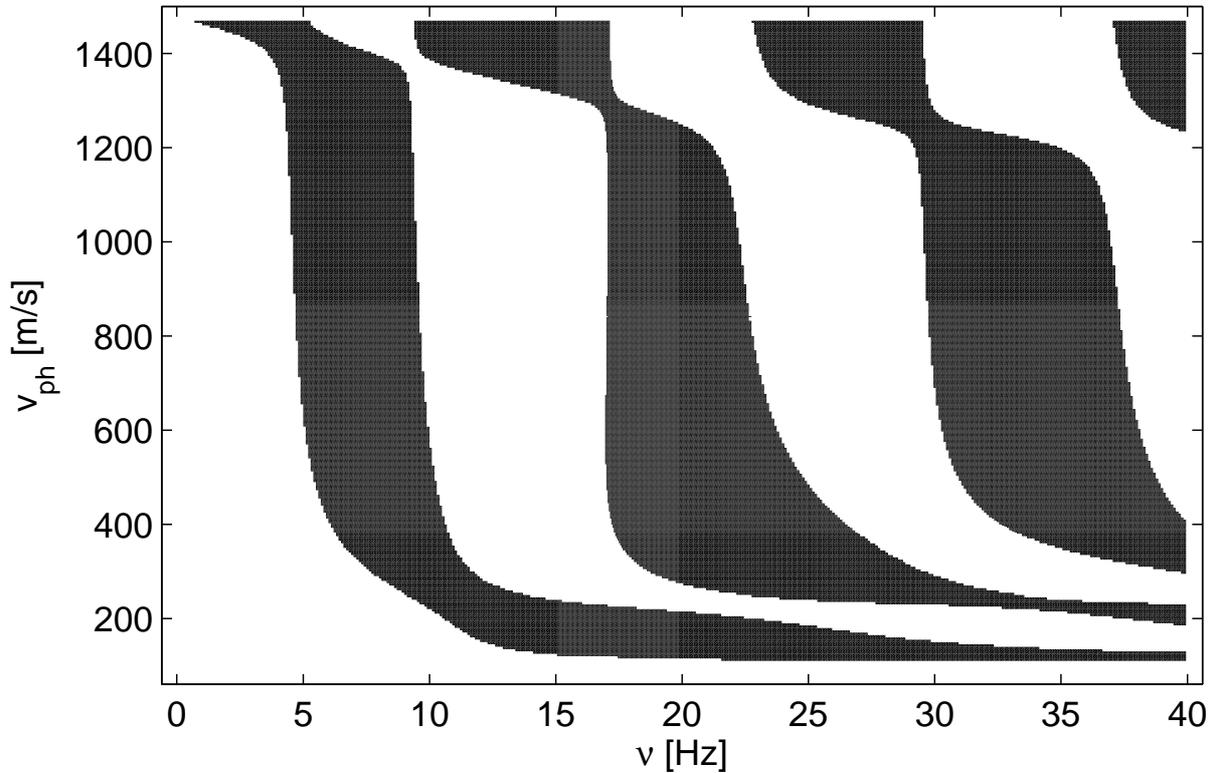


Abbildung 3.2: Vorzeichen der Haskell–Funktion  $\mathcal{F}_R(\nu, k)$ . Die Bedingungen für die Existenz der Rayleigh–Welle sind an den Nullstellen der Funktion erfüllt, hier zu sehen als Übergänge zwischen weiß und schwarz.

Mit der obigen Definition der Wellenzahl lassen sich die Phasen– und Gruppengeschwindigkeit durch folgende Beziehungen bestimmen:

$$v_{ph}(\nu) = \frac{\nu}{k(\nu)} \quad \text{und} \quad v_{gr}(\nu) = \frac{\partial \nu}{\partial k(\nu)}. \quad (3.9)$$

Somit kann die Haskell–Funktion auch in Abhängigkeit von Frequenz und Phasengeschwindigkeit geschrieben werden, was in vielen Fällen zu einer anschaulicheren Darstellung führt.

Anhand des Schichtmodells in Tabelle 3.1 wird die Haskell-Funktion berechnet. Wie Abbildung 3.2 zeigt, existieren zu einer Frequenz oder Geschwindigkeit in der Regel mehrere Lösungen. Diese einzelnen Lösungen bilden linienförmige Untermengen der Geschwindigkeits–Frequenzebene, sogenannten Moden. Diese Moden werden in der Reihenfolge der niedrigsten enthaltenen Frequenz gezählt und daher als 1., 2., 3. Mode usw. bezeichnet, wobei für die 1. Mode auch der Begriff „Grundmode“ gebräuchlich ist. Zur Berechnung der Dispersionskurven, wie z.B. der in Abbildung 3.3, wird ein iterativer Algorithmus verwendet, der die einer Mode zugehörigen Nullstellen in der Geschwindigkeits–

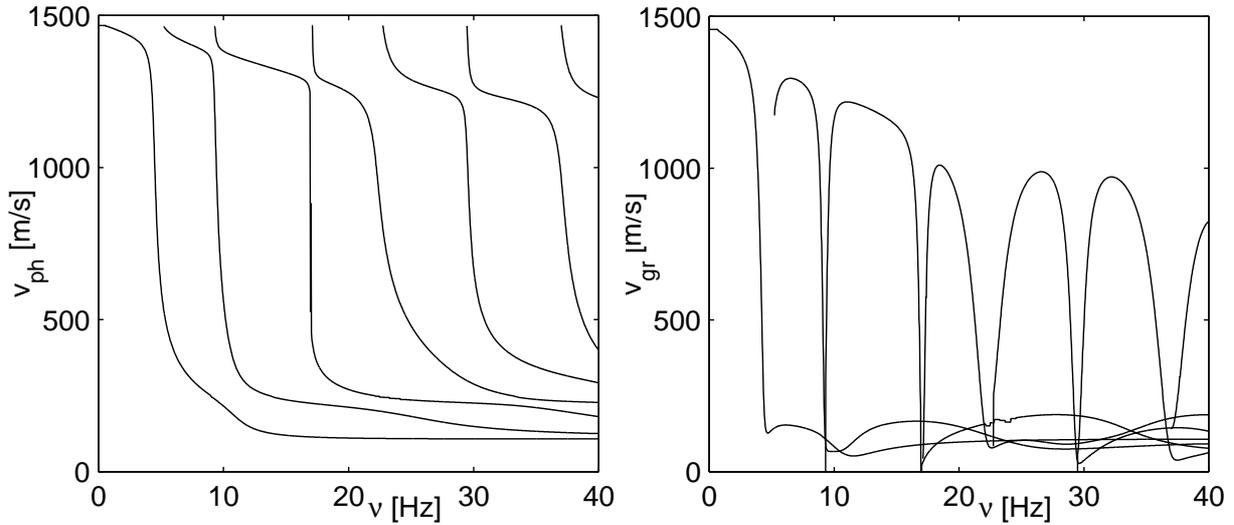


Abbildung 3.3: Phasen- und Gruppengeschwindigkeitskurven der im Frequenzbereich bis 40 Hz enthaltenen Moden.

Frequenzebene berechnet. Dabei wird die Dispersionsfunktion um eine bekannte Nullstelle durch eine Taylor-Reihenentwicklung linear entwickelt. Damit ist es möglich, die Lage der Nullstelle von  $\mathcal{F}_R(\nu, v_{ph})$  für eine veränderte Frequenz abzuschätzen. Diese Schätzung wird als Startwert für eine Nullstellensuche nach dem Newton-Verfahren benutzt (siehe auch Abschnitt 4.3). In der Geophysik ist es üblich die Gruppengeschwindigkeit ebenfalls mit Hilfe der Änderung der Phasengeschwindigkeit zu berechnen. Dazu wird (siehe z.B. Buttkus (1991)) die Beziehung

$$v_{gr} = \frac{1}{\partial k(\nu)/\partial \nu} = \frac{v_{ph}^2(\nu)}{v_{ph}(\nu) - \nu \partial v_{ph}(\nu)/\partial \nu} \quad (3.10)$$

benutzt, wobei die Phasengeschwindigkeit als bijektive Funktion der Frequenz betrachtet werden muß, damit diese Gleichung gilt. Betrachtet man das Aussehen der Haskell-Matrix in Abbildung 3.2 so erkennt man, daß die Annahme der Bijektivität verletzt wird. Da dort nicht nur die Berechnung der Gruppengeschwindigkeit unmöglich ist, sondern ferner der funktionale Zusammenhang  $v_{ph}(\nu)$  und damit auch die Taylor-Entwicklung nicht existiert, bricht ein iterativer Algorithmus an dieser Stelle ab. Der in dieser Arbeit verwendete verbesserte Algorithmus dagegen stützt sich auf Gleichung (3.9) und betrachtet die Dispersionskurven zum Teil als Funktion  $v_{ph}(\nu)$  oder  $\nu(v_{ph})$ , abhängig von der Lage der Tangente an die Dispersionskurve. Durch dieses hybride Verfahren ist es möglich, die Dispersionskurve einer Mode zuverlässig und schnell über die gesamte Geschwindigkeits-Frequenzebene zu verfolgen.

# Kapitel 4

## Inversion

### 4.1 Einführung

Die Grundlage des allgemeinen geophysikalischen Inversionsproblems ist ein Datensatz  $\underline{d}_{\text{obs}} = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{D}$ , bestehend aus  $n$  einzelnen Observablen  $d_i$ , die den Meßwert einer beliebigen geophysikalischen Methode an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit darstellen. Im vorangehenden Kapitel wurden Methoden beschrieben, die anhand eines gegebenen geologischen Modells, welches durch einen Modellvektor  $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_m) \in \mathbb{M}$  parametrisiert ist, einen synthetischen Datensatz  $\underline{d}_{\text{mod}}$  erzeugen. Unter der Voraussetzung, daß die Modellvorstellungen, auf denen diese Modellierungen beruhen, korrekt sind, kann man erwarten, im Rahmen der Meßgenauigkeit und zusätzlich auftretender Meßfehler, im Experiment ein mit den synthetischen Daten in Einklang stehendes Ergebnis zu erhalten. Die Modellvorstellungen beinhalten sowohl die zugrundegelegten physikalischen Gesetzmäßigkeiten als auch die darin einfließenden Modellparameter. Die Funktionale  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{d}_{\text{mod}} = \mathcal{F}(\underline{m})$ , die einen Datensatz aus den Modellparametern erzeugen, werden als bekannt angenommen. Das klar definierte Ziel eines Inversionsalgorithmus ist es nun, ein optimales  $\underline{m}^*$  zu finden, so daß der modellierte Datensatz mit den gemessenen Daten möglichst gut übereinstimmt, also im Idealfall  $\underline{d}_{\text{mod}} = \underline{d}_{\text{obs}}$ . Der Modellvektor  $\underline{m}^*$  gilt dann als Lösung des geophysikalischen Problems.

Es gibt unterschiedliche Strategien, um die Lösung  $\underline{m}^*$  zu ermitteln:

1. Direkte Inversionsverfahren: Diese sind in der Geophysik kaum anzutreffen, da sie nur unter sehr einschränkenden Annahmen an das geologische Modell durchführbar sind. Das klassische Beispiel für ein direktes Inversionsverfahren ist das aus der Seismologie stammende Wiechert–Herglotz–Verfahren.
2. Reguläre Suchverfahren: Die einfachste Methode der Inversion besteht in einer Pa-

rametrisierung des Modellraumes durch ein reguläres Gitter, wobei an jedem Gitterpunkt das Vorwärtsproblem gelöst wird. Ein Vergleich mit den gemessenen Daten bestimmt dann das optimale Modell. Diese Methode wird in dieser Arbeit angewandt, um die Fehlerflächen für Schnitte durch den Modellparameterraum darstellen zu können. Durch die Gesetze der Kombinatorik sind dieser Methode enge Grenzen gesetzt, da die Menge der möglichen Modelle schnell gegen unendlich tendiert.

3. Statistische Suchverfahren: Ähnlich zum regulären Suchen werden nur Auswertungen der Modellierungsfunktion verwendet. Allerdings wird der aktuelle Modellvektor innerhalb des Modellparameterraumes durch Zufall ausgewählt, wobei unterschiedliche Auswahlregeln zu einer Reihe von Verfahren führen. Die bekanntesten sind das Monte–Carlo–Verfahren und das Simulated Annealing mit seinen verschiedenen Unterarten. Auch bei diesen Verfahren wird die Anzahl der zu berechnenden Modelle sehr groß.
4. Gradienten–Verfahren: Diese Verfahren benutzen neben der Funktion  $\mathcal{F}$  auch deren partielle Ableitungen nach den einzelnen Modellparametern. Dadurch wird der Rechenaufwand pro Punkt deutlich erhöht, aber da mit Hilfe der Ableitungen die Richtung der weiteren Suche festgelegt wird, bilden die auszuwertenden Modelle einen eindimensionalen Unterraum des Modellparameterraumes. Dadurch sinkt die Zahl der benötigten Modellierungen um Größenordnungen. Nachteil dieser Verfahren ist die lokal beschränkte Konvergenz. Für nicht–konvexe Probleme wird nur ein lokales Minimum des Optimierungsproblems gefunden.

Aufgrund der Komplexität des geophysikalischen Vorwärtsproblems ist man in der Regel gezwungen, iterative Verfahren zur Inversion einzusetzen, um die Anzahl der benötigten Modellierungen gering zu halten. Die iterativen Methoden sollen in den folgenden Abschnitten näher dargelegt werden. Dabei werden in den Abschnitten 4.2 bis 4.6 die Grundlagen dieser Klasse von Inversionsverfahren formuliert, insbesondere die den Verfahren zugrundeliegenden Definitionen und einschränkenden Bedingungen, da diese zum grundlegenden Verständnis der Motivationen, die den in den folgenden Abschnitten verwendeten Ansätzen zugrundeliegen, erforderlich sind. Anhand eines Beispiels werden die Bedingungen der Konvergenz der Verfahren demonstriert. Um die Zuverlässigkeit der Inversion zu erhöhen bzw. einige Problemstellungen erst behandelbar zu machen, wird in Abschnitt 4.7 die Singulärwertzerlegung von beliebigen Matrizen dargestellt und deren erfolgreiche Anwendung in einer Inversion aufgezeigt. Die dargestellten Methoden werden daraufhin in Abschnitt 4.8 zu einem Joint Inversionsverfahren kombiniert, welches durch Aufteilung des gesamten Problems in Subräume eine hohe Effizienz besitzt. Abschließend wird der Abschnitt 4.9 einer neuen Technik zur Inversion von Rayleigh–Wellen gewidmet, die es ermöglicht, ohne eine interaktive Zuordnung von Moden zu einem Signal, diesen Wellentyp zur Inversion zu nutzen.

## 4.2 Grundlagen iterativer Verfahren

In den meisten Fällen sind globale Optimierungsstrategien aufgrund der großen Anzahl der zu überprüfenden Modelle nicht in angemessener Zeit durchführbar. Zudem sind in der Regel a priori Informationen vorhanden, so daß die generelle Struktur des Untersuchungsobjektes bekannt sind. Daher kann man versuchen, das Inversionsproblem mit Hilfe iterativer Methoden anzugehen. Ausgehend von einem initialen Startmodell  $\underline{\mathbf{m}}_0$  wird die an die gemessenen Daten bestangepaßte Modellierung in einem Bereich des Modellparameterraumes gesucht. Mit jeder Iteration wird ein Modell  $\underline{\mathbf{m}}_k$  gesucht, das die gemessenen Daten mit einem verringerten Fehler erklären kann. Es entsteht eine Folge von Modellvektoren  $\underline{\mathbf{m}}_k$ , von der gefordert wird, daß sie gegen den Lösungsvektor  $\underline{\mathbf{m}}^*$  konvergiert.

Die Stärke der Konvergenz läßt sich durch folgendes Quotientenkriterium quantifizieren. Sei  $\mathbb{M}$  ein normierter Raum und  $\underline{\mathbf{m}}_k$  eine Folge in  $\mathbb{M}$ . Die Folge heißt konvergent von mindestens  $q$ -ter Ordnung falls gilt:

1.  $\underline{\mathbf{m}}_k$  konvergiert gegen ein  $\underline{\mathbf{m}}^* \in \mathbb{M}$ .
2. Es gibt ein  $C \geq 0, q > 1$  und ein  $k_0 \in \mathbb{N}$ , so daß für alle  $k > k_0$  gilt:

$$\|\underline{\mathbf{m}}_{k+1} - \underline{\mathbf{m}}^*\| \leq C \|\underline{\mathbf{m}}_k - \underline{\mathbf{m}}^*\|^q. \quad (4.1)$$

Eine Folge besitzt mindestens lineare Konvergenz für  $q = 1$  und mit einer Konvergenzrate  $C \in [0, 1[$ .

Ist die Konvergenz der Folge  $\underline{\mathbf{m}}_k$  gesichert, muß ein geeignetes Abbruchkriterium der Iteration definiert werden. Da die exakte Lösung in der Regel nicht erreicht wird, kann man festlegen, wie genau die Lösung bestimmt werden soll, d.h.  $\|\underline{\mathbf{m}}_k - \underline{\mathbf{m}}^*\| \leq \epsilon$  mit  $\epsilon > 0$ . Dieses Kriterium ist sicherlich nur theoretischer Natur, da die Lösung nicht bekannt ist. Stattdessen verwendet man als Abbruchkriterium eine hinreichend kleine Veränderung des aktuellen Modellvektors, d.h.  $\|\underline{\mathbf{m}}_{k+1} - \underline{\mathbf{m}}_k\| \leq \epsilon$  und/oder eine hinreichend genaue Anpassung der gemessenen Daten  $\underline{\mathbf{d}}$ , so daß  $\|\mathcal{F}(\underline{\mathbf{m}}_k) - \underline{\mathbf{d}}\| \leq \epsilon$ .

Das Prinzip der im folgenden vorgestellten Verfahren eine konvergierende Folge von  $\underline{\mathbf{m}}_k$  zu berechnen, beruht auf einer Linearisierung des Vorwärtsproblems. Entwickelt man die Funktion  $\mathcal{F}$  in einer Taylor-Reihe um ein Modell  $\underline{\mathbf{m}}_k$ , so erhält man, bei Vernachlässigung der Terme mit höherer als erster Ordnung, eine Approximation von  $\mathcal{F}$  für einen Modellvektor  $\underline{\mathbf{m}}$  durch

$$\mathcal{F}(\underline{\mathbf{m}}) = \mathcal{F}(\underline{\mathbf{m}}_k) + (\nabla \mathcal{F}^T(\underline{\mathbf{m}}_k))^T (\underline{\mathbf{m}} - \underline{\mathbf{m}}_k). \quad (4.2)$$

Dabei sei der Gradient durch  $\nabla = (\frac{\partial}{\partial m_1}, \frac{\partial}{\partial m_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial m_n})^T$  definiert. Der in Gleichung (4.2) auftauchende Gradient der Modellierungsfunktion ist im allgemeinen nicht analytisch berechenbar, so daß in Näherung ein Differenzenquotient verwendet wird. Die numerischen

Ableitungen der  $i$ -ten Komponente des Datenvektors nach der  $j$ -ten Komponente des Modellparametervektors werden zur Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  zusammengefaßt, wobei die einzelnen Elemente durch

$$F'_{i,j} = \frac{\mathcal{F}_i(\underline{\underline{m}} + h \cdot \underline{\underline{\hat{x}}}_j) - \mathcal{F}_i(\underline{\underline{m}} - h \cdot \underline{\underline{\hat{x}}}_j)}{2h} \quad (4.3)$$

berechnet werden. Dabei bezeichnet  $\underline{\underline{\hat{x}}}_j$  den  $j$ -ten Einheitsvektor des Modellparameter-raumes. Die zu lösende Gleichung läßt sich somit kurz schreiben als

$$\Delta \underline{\underline{d}} - \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{\underline{m}} = 0. \quad (4.4)$$

### 4.3 Das Newton–Verfahren

Das Newton–Verfahren ist ein wohlbekanntes Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen differenzierbarer Funktionen  $\mathcal{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Mit Hilfe der Linearisierung in Gleichung (4.2) läßt sich das Newton–Verfahren direkt auf Abbildungen  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  übertragen. Die schnelle Konvergenz bleibt dabei erhalten. Nach der Wahl eines Startpunktes  $\underline{\underline{m}}_0 \in \mathbb{M}$  wird für  $k \in \mathbb{N}$  der Nachfolger  $\underline{\underline{m}}_{k+1}$  von  $\underline{\underline{m}}_k$  als eine Nullstelle der Linearisierung

$$\mathcal{F}_k(\underline{\underline{m}}_{k+1}) = \mathcal{F}(\underline{\underline{m}}_k) + \underline{\underline{F}}'(\underline{\underline{m}}_k) (\underline{\underline{m}}_{k+1} - \underline{\underline{m}}_k) = 0 \quad (4.5)$$

von  $\mathcal{F}$  an der Stelle  $\underline{\underline{m}}_k$  gesucht. Existiert die Inverse  $\underline{\underline{F}}'^{-1}$  an der Stelle  $\underline{\underline{m}}_k$ , so gilt für die neue Iterierte:

$$\underline{\underline{m}}_{k+1} = \underline{\underline{m}}_k - \underline{\underline{F}}'^{-1}(\underline{\underline{m}}_k) \mathcal{F}(\underline{\underline{m}}_k). \quad (4.6)$$

Die schnelle Konvergenz ist mit einer Regularitätsbedingung verknüpft. Für Funktionen soll die Steigung der Tangente an der Nullstelle verschieden von Null sein. Für mehrdimensionale Abbildungen wird man dann fordern, daß die Steigung vom Punkt  $\underline{\underline{m}}^*$  ausgehend in jeder Richtung verschieden von Null ist. Daraus folgt die Regularität von  $\underline{\underline{F}}'$ , bzw. die Forderung des vollen Ranges.

Mit der Definition des diskreten Gradienten durch Gleichung (4.3) beweisen Dennis & Schnabel (1983) die Konvergenz des Newton–Verfahrens. Die Voraussetzungen sind, daß  $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^m$  und  $\mathcal{F} : \mathbb{M} \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenzierbar sei. Ferner sei die Lösung  $\underline{\underline{m}}^* \in \mathbb{M}$ , so daß  $\mathcal{F}(\underline{\underline{m}}^*) = 0$ . Die Ableitung  $\underline{\underline{F}}'$  aus Gleichung (4.3) sei lokal stetig und invertierbar. Dann existiert ein  $\epsilon > 0$  mit  $\|\underline{\underline{m}}_0 - \underline{\underline{m}}^*\| < \epsilon$  und ein  $h_0 > 0$ , so daß für jede Folge  $h_k$  in  $\mathbb{R}$  mit  $0 < h_k < h_0$  die durch Gleichung (4.6) definierte Folge  $\underline{\underline{m}}_k$  gegen  $\underline{\underline{m}}^*$  linear konvergiert. Gilt zusätzlich  $\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0$ , so ist die Konvergenz superlinear.

## 4.4 Das Gauß-Newton-Verfahren

Ist man nicht in der Lage, Gleichung (4.4) exakt zu lösen, so soll doch der resultierende Fehler minimiert werden, um ein bestangepaßtes Modell zu finden. Dazu muß eine geeignete Fehlerfunktion definiert werden, die es zu minimieren gilt. Wählt man die Summe der Quadrate der Fehler in den einzelnen Observablen  $\underline{d}_i$ , führt dies zur quadratischen Fehlerfunktion

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\Delta \underline{d} - \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{m})^T (\Delta \underline{d} - \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{m}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \underline{m}^T \underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{m} - \Delta \underline{m}^T \underline{\underline{F}}'^T \Delta \underline{d} + \text{const.}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Die Matrix  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}'$  ist symmetrisch und positiv definit. Daher ist die Fehlerfunktion für jeden Entwicklungspunkt  $\underline{m}_k$  konvex und besitzt exakt ein Minimum an der Stelle  $\underline{m}^*$ . Damit lautet die notwendige und hinreichende Bedingung für das Minimum

$$\nabla \mathcal{L} = \underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{m} - \underline{\underline{F}}'^T \Delta \underline{d} = 0. \quad (4.8)$$

Zur Bestimmung des Minimums von  $\mathcal{L}$  ist also die Gleichung  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}' \Delta \underline{m} = \underline{\underline{F}}'^T \Delta \underline{d}$  zu lösen.  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}'$  ist eine  $m \times m$ -Matrix, unabhängig von der Dimension  $n$  des Datenraumes. Daher können überbestimmte Probleme mit  $n > m$  im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate gelöst werden. Besitzt  $\underline{\underline{F}}'(\underline{m})$  vollen Rang, so ist  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}'$  invertierbar und die Lösung der Gleichung (4.8) ist durch

$$\underline{m}_{k+1} = \underline{m}_k - [\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}']^{-1} \underline{\underline{F}}'^T \Delta \underline{d} \quad (4.9)$$

gegeben. Die Gleichung (4.8) heißt Gaußsche Normalgleichung und das durch Gleichung (4.9) festgelegte Iterationsverfahren wird als Gauß-Newton-Verfahren bezeichnet. Das resultierende Verfahren hat eine formale Ähnlichkeit zum Newton-Verfahren, wobei das Newton-Verfahren ein Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen ist. Die Konvergenz des Verfahrens läßt sich daher auch analog zum Newton-Verfahren beweisen (Brown & Dennis (1972)).

Für ein Modell  $\underline{m}^* \in \mathbb{R}^m$  mit  $\mathcal{F}(\underline{m}^*) = 0$  und unter der Bedingung, daß  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}'$  invertierbar ist, existiert eine Umgebung um  $\underline{m}^*$ , so daß das durch Gleichung (4.9) bestimmte Verfahren für jeden Startpunkt innerhalb dieser Umgebung durchführbar ist. Die gesamte Iterationsfolge bleibt innerhalb der Umgebung und konvergiert superlinear gegen  $\underline{m}^*$ . Die schnelle Konvergenz des Gauß-Newton-Verfahrens folgt nur für den Fall, daß die Minillösung der Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  zugleich eine Nullstelle von  $\mathcal{F}$  ist. Sonst braucht das Gauß-Newton-Verfahren nicht einmal lokal konvergent zu sein.

## 4.5 Verallgemeinertes Gradientenverfahren

Das klassische Gradientenverfahren vermutet, ausgehend von einem Punkt  $\underline{\mathbf{m}}_k$ , die Lösung des Minimierungsproblems  $\underline{\mathbf{m}}^*$  in Richtung des größten „Gefälles“. Die Richtung des steilsten Abstiegs ist durch den negativen Gradienten definiert, weshalb die Iteration des klassischen Gradientenverfahrens durch

$$\underline{\mathbf{m}}_{k+1} = \underline{\mathbf{m}}_k - \alpha_k \nabla \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k) \quad (4.10)$$

mit einer Schrittweite  $\alpha_k \in \mathbb{R}^+$  gegeben ist. Im Gegensatz zum Newton- und Gauß-Newton-Verfahren werden an  $\nabla \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k)$  keine weiteren Anforderungen gestellt. Insbesondere muß  $\underline{\mathbf{F}}'$  weder invertierbar sein noch den vollen Rang aufweisen. Läßt man neben dem negativen Gradienten auch andere Richtungen  $\underline{\mathbf{l}}_k$  zu, so erhält man teilweise effektivere Verfahren. Man kann also ein allgemeines Gradientenverfahren durch

$$\underline{\mathbf{m}}_{k+1} = \underline{\mathbf{m}}_k - \alpha_k \underline{\mathbf{l}}_k \quad (4.11)$$

mit der Abstiegsrichtung  $\underline{\mathbf{l}}_k$  und der Schrittweite  $\alpha_k > 0$  beschreiben. Die Richtung  $\underline{\mathbf{l}}_k$  heißt Abstiegsrichtung im Punkt  $\underline{\mathbf{m}}_k$ , wenn die zu minimierende Funktion  $\mathcal{L}$  an der Stelle differenzierbar ist und dort eine positive Richtungsableitung besitzt, d.h.  $\underline{\mathbf{l}}_k^T \nabla \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k) > 0$ .

### 4.5.1 Schrittweitenbestimmung

Neben einer sinnvollen Bestimmung der Abstiegsrichtung ist für die Konvergenz eines Gradientenverfahrens auch die Schrittweitenregelung entscheidend, da ein allgemeines Gradientenverfahren auch bei absteigenden Funktionswerten nicht gegen die Minimallösung zu konvergieren braucht.

Die einfachste Methode zur Schrittweitenbestimmung ist die Minimierungsregel, welche den Nachfolger der aktuellen Lösung  $\underline{\mathbf{m}}_{k+1}$  entlang des durch die Abstiegsrichtung festgelegten Strahles bestimmt, so daß  $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_{k+1})$  minimal wird. Das heißt, es wird durch Auswertung der Funktion  $\mathcal{L}$  die Schrittweite  $\alpha_k$  bestimmt für die gilt:

$$\mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_{k-\alpha_k \underline{\mathbf{l}}_k}) = \min \{ \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_{k-\alpha \underline{\mathbf{l}}_k}) \mid \alpha \in [0, \infty) \}. \quad (4.12)$$

Der Nachteil der Minimierungsregel besteht darin, daß sie im allgemeinen unendlich viele Funktionsauswertungen benötigt. Demnach wird eine Realisierung der Minimierungsregel der Einschränkung unterliegen, daß nur ein lokales Minimum näherungsweise bestimmt werden kann.

Eine weitere Schrittweitenregel ist  $\alpha_k = [\underline{\mathbf{F}}'^T \underline{\mathbf{F}}']^{-1}$ . Da  $[\underline{\mathbf{F}}'^T \underline{\mathbf{F}}']^{-1} \nabla \mathcal{L}$  wegen

$$([\underline{\mathbf{F}}'^T \underline{\mathbf{F}}']^{-1} \nabla \mathcal{L})^T \nabla \mathcal{L} = (\nabla \mathcal{L})^T [\underline{\mathbf{F}}'^T \underline{\mathbf{F}}']^{-1} \nabla \mathcal{L} > 0 \quad (4.13)$$

eine Abstiegsrichtung ist, geht das verallgemeinerte Gradientenverfahren in das Newton-Verfahren über.

Eine gebräuchliche Schrittweitenregel wurde von Armijo (1966) und Goldstein (1966) entwickelt. Sie setzen die Steigung des Gradienten mit der Steigung der Sekante der Funktion  $\mathcal{L}$  an den Stellen  $\underline{\mathbf{m}}_k$  und  $\underline{\mathbf{m}}_k - \alpha_k \underline{\mathbf{l}}_k$  in Verhältnis. Gesucht ist dann eine Schrittweite  $\alpha_k > 0$ , so daß für das Sekanten-/Tangentenverhältnis gilt:

$$1 - \varsigma \geq \frac{\mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k) - \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k - \alpha_k \underline{\mathbf{l}}_k)}{\alpha_k \underline{\mathbf{l}}_k^T \nabla \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k)} \geq \varsigma, \quad (4.14)$$

wobei  $\varsigma \in [0, \frac{1}{2}]$  eine Konstante ist. Diese Schrittweitenregel führt immer zu einem echten Abstieg  $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_{k+1}) < \mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k)$ .

## 4.5.2 Konvergenz des Verfahrens

Wird der verallgemeinerte Gradientenalgorithmus zusammen mit der Minimierungsregel aus Gleichung (4.12) zur Lösung des quadratischen Optimierungsproblems aus Gleichung (4.7) verwendet, dann existiert während jedem Schritt  $k$  eine symmetrische positiv definite Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{l}}}_k$ , so daß die Beziehung

$$\underline{\mathbf{l}}_k = \underline{\underline{\mathbf{l}}}_k \nabla \mathcal{L} \quad (4.15)$$

zwischen dem Gradienten an der Stelle  $\underline{\mathbf{m}}_k$  und der Abstiegsrichtung  $\underline{\mathbf{l}}_k$  besteht. Unter Verwendung der Kantorowitsch-Ungleichung (Kantorowitsch & Akilow (1964)) beweist Luenberger (1973) für den Anpassungsfortschritt des Algorithmus zwischen zwei Iterationen folgende Abschätzung:

$$\|\underline{\mathbf{m}}_{k+1} - \underline{\mathbf{m}}^*\| \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_m}{\lambda_1 + \lambda_m} \|\underline{\mathbf{m}}_k - \underline{\mathbf{m}}^*\|. \quad (4.16)$$

Dabei sind die Werte  $\lambda_1 \dots \lambda_m$  die in absteigender Reihenfolge sortierten Eigenwerte der Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{l}}}_k^{\frac{1}{2}} \underline{\underline{\mathbf{F}}}^T \underline{\underline{\mathbf{F}}} \underline{\underline{\mathbf{l}}}_k^{\frac{1}{2}}$ . Das heißt, daß das Konvergenzverhalten durch das Verhältnis zwischen dem größten Eigenwert  $\lambda_1$  und dem kleinsten Eigenwert  $\lambda_m$  bestimmt wird. Sind alle Eigenwerte von der gleichen Größenordnung so wird die Lösung  $\underline{\mathbf{m}}^*$  innerhalb weniger Iterationen gefunden. Ist das Verhältnis  $\lambda_1/\lambda_m$ , auch als Konditionszahl bekannt, sehr groß oder ist  $\lambda_m = 0$ , so ist die Konvergenz nur sehr langsam oder die Iterationsfolge konvergiert nicht gegen die Lösung, sondern verharrt beim Startmodell. Durch den Vergleich von Gleichung (4.16) mit der Definition von Konvergenzrate und -ordnung in Gleichung (4.1) ist offensichtlich, daß ein verallgemeinertes Gradientenverfahren nur linear gegen die Lösung konvergiert.

## 4.6 Anwendung der Verfahren

Zur Veranschaulichung der bisherigen theoretischen Ausführungen soll ein einfaches Inversionsproblem gelöst werden. Dabei handelt es sich um die refraktionsseismische Erkundung für das einfache Modell einer Schicht mit der Mächtigkeit  $h_1 = 5$  m und der p-Wellengeschwindigkeit  $v_{P1} = 400$  m/s über einem Halbraum mit  $v_{P2} = 750$  m/s. In den oberen Figuren der Abbildung 4.1 wird der Fehler zwischen der modellierten Laufzeitkurve dieses Modells und den modellierten Laufzeitkurven für veränderte Werte von  $h_1$  und  $v_{P2}$  durch die Konturlinien der Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  dargestellt. Die Folge der Modellvektoren  $\underline{\mathbf{m}}_k$  ist durch jeweils eine rote und eine grüne Linie in diese Darstellung integriert worden. Dabei bezeichnen rote Linien den Verlauf des verallgemeinerten Gradientenverfahrens und grüne Linien den des Gauß–Newton–Verfahrens. Darunter sind die Werte der Fehlerfunktion  $\mathcal{L}(\underline{\mathbf{m}}_k)$  gegen die Anzahl  $k$  der Iterationen aufgetragen, wobei die jeweiligen Verfahren wie oben beschrieben gekennzeichnet sind.

Die genauere Betrachtung der Abbildung 4.1 läßt dreierlei erkennen:

1. Die Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  ist offensichtlich nicht konvex.
2. Die Konvergenz ist abhängig vom Startmodell.
3. Die Konvergenzordnung des Gauss–Newton–Verfahrens ist erwartungsgemäß höher als die des Gradientenverfahrens.

Punkt 1 bedeutet, daß sich die Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  nicht überall, wie in Abschnitt 4.4 gefordert, durch eine positiv definite quadratische Form approximieren läßt. Diese Tatsache ist Ausdruck der Nichtlinearität des Inversionsproblems. Daraus folgt für Punkt 2 nicht nur, daß die Konvergenzrate vom Startmodell abhängig ist, sondern auch die Konvergenz insgesamt. Dies wird durch den Vergleich der rechten und linken Hälfte von Abbildung 4.1 verdeutlicht. Die Situation in beiden Fällen ist bis auf die Wahl eines leicht unterschiedlichen Startmodells identisch. Beim Gauß–Newton–Verfahren besteht eine Abhängigkeit des neuen Modellvektors  $\underline{\mathbf{m}}_{k+1}$  von der Krümmung der Funktion  $\mathcal{L}$  an der Stelle  $\underline{\mathbf{m}}_k$ . Das führt zunächst dazu, daß der Modellverbesserungsvektor  $\Delta \underline{\mathbf{m}}$  nicht in Richtung des Gradienten liegt. Dies ist auch Ursache für die höhere Konvergenzordnung des Gauß–Newton–Verfahrens, was zu einer deutlich geringeren Anzahl von benötigten Iterationen führt, wie Abbildung 4.1 zeigt. Der Nachteil dieses Verhaltens zeigt sich bei Wahl eines ungeeigneten Startmodells, wie dies in der rechten Hälfte der Abbildung 4.1 geschehen ist. Die anschließende Iteration führt zu einem Modellvektor, in dessen Umgebung die Bedingungen zur Durchführung des Gauss–Newton–Verfahrens nicht erfüllt sind, so daß die Iteration abgebrochen wird. Das Gradientenverfahren dagegen konvergiert auch für diesen Fall gegen die Lösung.

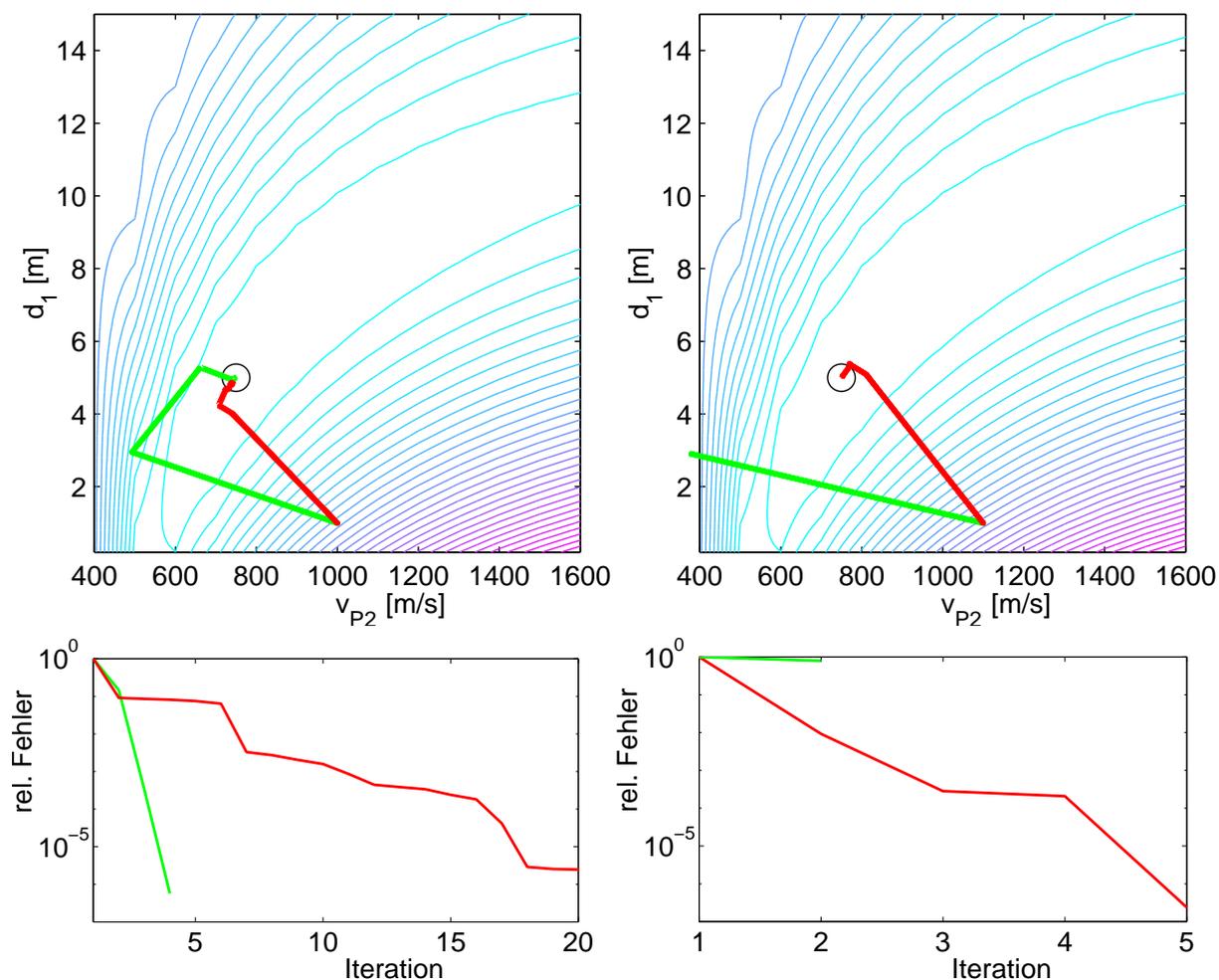


Abbildung 4.1: *Oben* : Folge der Modellvektoren für das Gradientenverfahren (rote Linien) und das Gauß-Newton-Verfahren (grüne Linien) bei unterschiedlicher Wahl des Startmodells. Die Konturlinien stellen die Fehlerfunktion dar, wobei cyan-farbene Linien niedrige und magenta-farbene Linien hohe Fehler kennzeichnen. Die Lösung ist durch  $\circ$  gekennzeichnet. *Unten*: Abnahme des relativen Fehlers während der Iteration.

## 4.7 Singulärwertzerlegung

Bei den schnell konvergierenden Newton- bzw. Gauß-Newton-Verfahren wurde die Invertierbarkeit bzw. der volle Rang der Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  gefordert. Tritt während der Inversion der Fall ein, daß die Variation eines oder mehrerer Modellparameter keinen Einfluß auf das Ergebnis der Modellierung hat, so wird durch die numerische Differentiation eine Nullspalte in der Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  erzeugt. Ist für einen Punkt  $\underline{\underline{m}}_k$  eine Observable  $d_i$  konstant gegenüber der Variation der Modellparameter, so wird in  $\underline{\underline{F}}'$  eine Nullzeile erzeugt. Sind zwei oder mehrere Modellparameter voneinander abhängig und existieren keine Datenpunkte, die jeweils von einem einzelnen dieser Parameter abhängig sind, so sind die Spalten von  $\underline{\underline{F}}'$  linear abhängig. In jedem dieser drei Fälle wird der Rang  $r$  der Matrix reduziert, so daß weder  $\underline{\underline{F}}'$  noch  $\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}'$  invertierbar sind. Eine Lösung dieses Problems kann durch den Ansatz der Singulärwertzerlegung gefunden werden.

Die „Singular Value Decomposition“ (SVD) nach Lanczos (1958) kann mit jeder Matrix durchgeführt werden. Durch die SVD werden orthonormale Basen des Datenraumes im  $ID_{\perp} \in \mathbb{R}^n$  und des Modellparameterraumes im  $IM_{\perp} \in \mathbb{R}^m$  erzeugt und die aufspannenden Vektoren werden zu den Matrizen  $\underline{\underline{U}}$  bzw.  $\underline{\underline{V}}$  zusammengefaßt. Diese Matrizen sind eine Abbildung des erzeugten orthonormierten Raumes auf den verwendeten Daten- bzw. Modellparameterraum.

Jede Matrix  $\underline{\underline{J}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  kann dargestellt werden als

$$\underline{\underline{J}} = \underline{\underline{U}} \underline{\underline{S}} \underline{\underline{V}}^T, \quad (4.17)$$

wobei die Spalten von  $\underline{\underline{U}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  die Eigenvektoren von  $\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^T$  und die Spalten von  $\underline{\underline{V}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  die Eigenvektoren von  $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$  enthalten.  $\underline{\underline{S}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  ist eine beliebige Matrix, die auf ihrer Hauptdiagonalen die „Singular Values“, d.h. die Wurzeln der Eigenwerte von  $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$  enthält. Dies sind die gleichen Eigenwerte wie von  $\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^T$ . Da  $\underline{\underline{J}}^T \underline{\underline{J}}$  und  $\underline{\underline{J}} \underline{\underline{J}}^T$  jeweils reelle symmetrische Matrizen sind, existieren  $r$  reelle Eigenwerte  $\lambda_i > 0$ , wobei  $r$  der Rang der Matrix  $\underline{\underline{J}}$  ist.

Es ist wichtig zu unterscheiden, ob ein Eigenvektor mit dem Eigenwert Null gekoppelt ist oder nicht. Seien  $\underline{\underline{U}}_r$  und  $\underline{\underline{V}}_r$  die Matrizen, deren Spalten die Eigenvektoren enthalten, die zu den  $r$  von Null verschiedenen Eigenwerten gehören. Weiterhin seien  $\underline{\underline{U}}_0$  und  $\underline{\underline{V}}_0$  die Matrizen, deren Spalten die Eigenvektoren enthalten, die zu den Eigenwerten gleich Null gehören. Die mit dem Subskript  $r$  gekennzeichneten Matrizen spannen die Unterräume  $ID_r, IM_r$  des Daten- bzw. Modellparameterraumes auf, wobei gilt:

$$\underline{\underline{J}} = [U_r, U_0] \begin{bmatrix} S_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r^T \\ V_0^T \end{bmatrix} = U_r S_r V_r^T. \quad (4.18)$$

Die Komponenten des Daten- bzw. Modellparameterraumes in Richtung der Eigenvektoren in  $\underline{\underline{U}}_0$  oder  $\underline{\underline{V}}_0$  beeinflussen nicht die Abbildungsmatrix  $\underline{\underline{J}}$  vom Modellparameterraum

in den Datenraum. Daher heissen die von  $\underline{\underline{U}}_0$  und  $\underline{\underline{V}}_0$  aufgespannten Räume  $ID_0, IM_0$  Daten- bzw. Modellnullraum.

### 4.7.1 Orthogonale Projektionsoperatoren

Oben wurde gezeigt, daß die Matrizen  $\underline{\underline{V}}$ ,  $\underline{\underline{U}}$ ,  $\underline{\underline{V}}_r$ ,  $\underline{\underline{U}}_r$ ,  $\underline{\underline{V}}_0$  und  $\underline{\underline{U}}_0$  orthogonal sind. Stellvertretend sollen  $\underline{\underline{V}}$  und  $\underline{\underline{V}}_r$  betrachtet werden, da die Eigenschaften analog auch für die anderen Matrizen gelten.

Es gilt  $\underline{\underline{V}}\underline{\underline{V}}^T = \underline{\underline{V}}^T\underline{\underline{V}} = \underline{\underline{I}}$ , wenn  $\underline{\underline{J}}$  vollen Rang besitzt. Ist der Rang  $r < m$ , so gilt zwar weiterhin  $\underline{\underline{V}}_r^T\underline{\underline{V}}_r = \underline{\underline{I}}$ , aber  $\underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{V}}_r^T \neq \underline{\underline{I}}$ .

Die Matrix  $\underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{V}}_r^T$  ist ein Projektionsoperator  $\mathfrak{P}$  eines beliebigen Modellvektors auf den Raum  $IM_r$ . Ein Projektionsoperator besitzt per definitionem die Eigenschaft, daß mehrmaliges Anwenden einen schon projizierten Vektor nicht verändert, d.h.  $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}\underline{\underline{m}}) = \mathfrak{P}\underline{\underline{m}}$ . Diese Bedingung ist offensichtlich erfüllt, da gilt:

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{P}\underline{\underline{m}}) = \underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{V}}_r^T\underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{V}}_r^T\underline{\underline{m}} = \underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{I}}\underline{\underline{V}}_r^T\underline{\underline{m}} = \mathfrak{P}\underline{\underline{m}}. \quad (4.19)$$

Mit Hilfe der Projektionsoperatoren ist es möglich, Daten- und Modellvektoren auf die vier Unterräume zu projizieren.

### 4.7.2 Die generelle Inverse

Für den Fall, daß die Matrix  $\underline{\underline{J}}$  einen defizitären Rang besitzt, kann aus Gleichung (4.18) eine generalisierte Inverse der Matrix berechnet werden:

$$\underline{\underline{J}}^\dagger = \underline{\underline{V}}_r\underline{\underline{S}}_r^{-1}\underline{\underline{U}}_r^T. \quad (4.20)$$

Die Matrix  $\underline{\underline{S}}$  ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten  $\lambda_i$ , so daß die Inverse wiederum eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonale die Werte  $1/\lambda_i$  enthält.

Für den Fall  $r = m = n$  entspricht die generelle Inverse der gewöhnlichen Inversen. Existieren dagegen Daten- und Modellnullräume, so ist die generalisierte Inverse die Lösung des Minimierungsproblems

$$\|\underline{\underline{J}}\underline{\underline{m}} - \underline{\underline{d}}\|^2 + \|\underline{\underline{m}}\|^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (4.21)$$

Das heißt, die Daten werden wie durch das Gauß-Newton-Verfahren im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate angepaßt. Dabei wird zusätzlich die Norm der Lösung  $\underline{\underline{m}}^*$  minimiert.

### 4.7.3 Auflösung und Redundanz

Die im vorherigen Abschnitt behandelte generelle Inverse einer Matrix eröffnet die Möglichkeit, formal Problemstellungen zu behandeln, die unterbestimmt und daher vieldeutig sind. Die formale Lösung alleine besitzt aber nur geringe Aussagekraft. Vielmehr muß es ein Unterscheidungskriterium geben, welche Observablen Relevanz besitzen und welche Modellparameter sich mit Hilfe der vorhandenen Daten bestimmen lassen. Mit Hilfe der linearen Approximation der Abbildungsfunktion  $\mathcal{F} : \text{IM} \rightarrow \text{ID}$  durch die Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  lassen sich die zwei folgenden Beziehungen schreiben:

$$\underline{\underline{m}}_r = \underline{\underline{F}}'^{\dagger} \underline{\underline{F}}' \underline{\underline{m}} = \underline{\underline{V}}_r \underline{\underline{V}}_r^T \quad (4.22)$$

$$\underline{\underline{d}}_r = \underline{\underline{F}}' \underline{\underline{F}}'^{\dagger} \underline{\underline{d}} = \underline{\underline{U}}_r \underline{\underline{U}}_r^T. \quad (4.23)$$

Diese Gleichungen können so interpretiert werden, daß die Anwendung einer Abbildung und die anschließende Umkehrung dieser Operation eine Art „Filter“ darstellt. Wird die Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  durch die SVD in eine Form gemäß Gleichung (4.17) gebracht, so ergeben sich die Projektionsoperatoren in die Unterräume  $\text{ID}_r$  und  $\text{IM}_r$ . Durch die Verwendung der generellen Inversen werden alle durch das Modell nicht erklärbaren Anteile der Observablen in den Datennullraum und alle nicht auflösbaren Modellparameter in den Modellparameternullraum projiziert. Besitzt  $\underline{\underline{F}}'$  den vollen Rang und ist invertierbar, so gilt  $\underline{\underline{F}}' \underline{\underline{F}}'^{\dagger} = \underline{\underline{I}}$ , d.h. alle Datenpunkte sind gleichermaßen relevant. Ist  $\underline{\underline{F}}'^{\dagger} \underline{\underline{F}}' = \underline{\underline{I}}$ , so finden sich alle Modellparameter in den Daten wieder und sind durch den Inversionsprozeß rekonstruierbar. Das Modell wäre perfekt aufgelöst.

Der Grad der Relevanz bzw. Auflösung kann durch die „Effective Independence Distribution“, kurz EID, (Kammer (1991), Poston & Tolson (1992), Poston et al. (1998)) quantifiziert und durch Ausschluß irrelevanter Elemente gezielt verändert werden. Die EID ist definiert durch den Vektor

$$\underline{\underline{e}} = \text{Diag} \left( \underline{\underline{F}}' (\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}')^{-1} \underline{\underline{F}}'^T \right). \quad (4.24)$$

Sei die Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  dargestellt durch ihre Singulärwertzerlegung, so folgt  $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{U}}_r \underline{\underline{U}}_r^T$ , bzw. für  $\underline{\underline{F}}'^T$  folgt  $\underline{\underline{e}} = \underline{\underline{V}}_r \underline{\underline{V}}_r^T$ . Die einzelnen Elemente des Vektors liegen deshalb im Intervall  $[0, 1]$ . Als eine weitere Eigenschaft der EID-Werte fanden Ben-Israel & Greville (1980)

$$\sum_{i=1}^N \underline{\underline{e}}_i = \text{Rang}(\underline{\underline{F}}'), \quad (4.25)$$

d.h., daß der  $i$ -te EID-Wert den Beitrag einer Observablen zum Rang der Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  angibt. Daraus folgt, daß Observable bzw. Modellparameter mit dem zugehörigen EID-Wert 0 keinerlei Relevanz besitzen und aus dem Optimierungsproblem eliminiert werden können, ohne den Rang der Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  zu verändern. Die Entfernung eines Elementes mit einem zugehörigen EID-Wert von 1 führt zu einer Erniedrigung des Rangs um 1, wodurch eine sonst invertierbare Matrix singulär wird.

#### 4.7.4 Inversion in den Unterräumen

Wie gezeigt wurde, sind die SVD und die EID geeignete Methoden, um relevante und irrelevante Anteile des gesamten Inversionsproblems voneinander zu separieren. Dadurch wird es möglich, die Inversion unterbestimmter Systeme durchzuführen, wobei die Lösung in dem durch  $\underline{\underline{V}}_r$  aufgespannten Unterraum gesucht wird. Bei großen Inversionsproblemen kann die Dimension dieses Unterraumes allerdings noch groß genug sein, um ein erhebliches Maß an Rechenzeit bei der Berechnung der Matrix  $\underline{\underline{F}}'$  zu erfordern. Für solche Fälle zeigten Kennett et al. (1988) den allgemeinen Weg der „Subspace Methods“ auf. Mit Hilfe von Projektionsoperatoren auf niedrigdimensionale Unterräume ist das gesamte Inversionsproblem auf effektive Weise sukzessive in diesen Unterräumen lösbar. Es ist nun naheliegend, die durch die SVD bestimmten Projektionsoperatoren zu diesem Zweck einzusetzen.

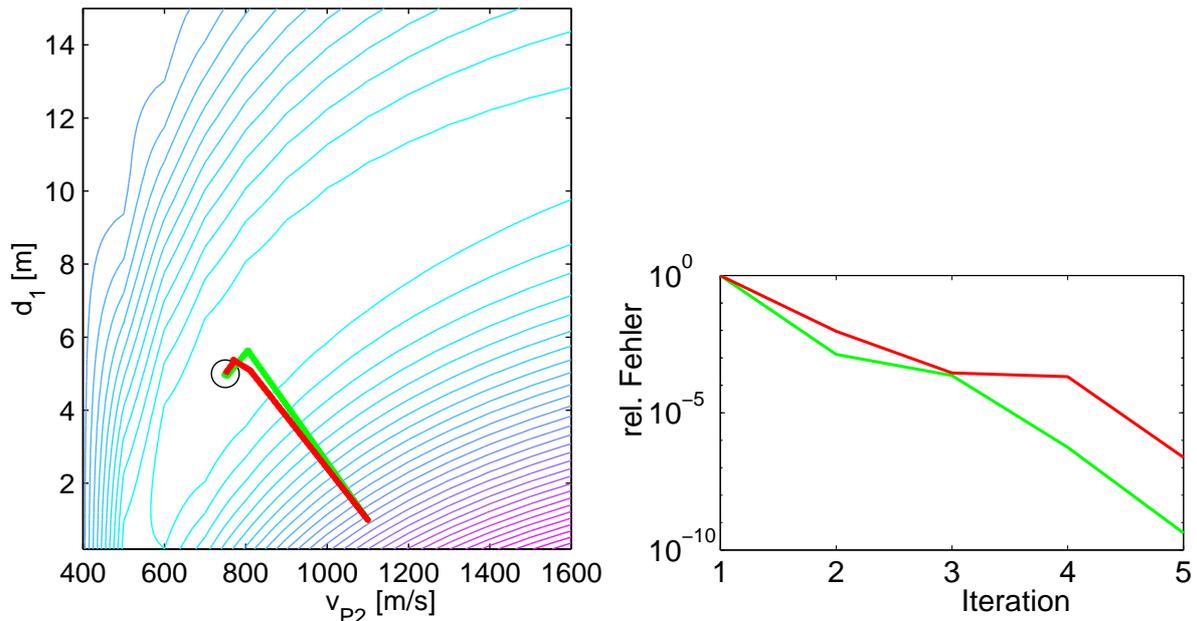


Abbildung 4.2: *Rechts*: Folge der Modellvektoren für das Gradientenverfahren (rote Linien) und das Subraum–Gauß–Newton–Verfahren (grüne Linien). Die Konturlinien stellen die Fehlerfunktion dar, wobei cyan–farbene Linien niedrige und mangenta–farbene Linien hohe Fehler kennzeichnen. Die Lösung ist durch  $\circ$  gekennzeichnet. *Links*: *Abnahme des relativen Fehlers während der Iteration.*

Zur Bestimmung der generalisierten Inversen wurden die Matrizen  $\underline{\underline{U}}_r$  und  $\underline{\underline{V}}_r$  durch die Eigenvektoren gebildet, deren zugehörige Eigenwerte  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  größer als Null sind. Damit kann das Verhältnis zwischen dem größten und dem kleinsten Eigenwert  $\lambda_1/\lambda_r$  unter Umständen recht groß werden. Nach den Erkenntnissen aus Abschnitt 4.5.2 bedingt aber eine schlechte Konditionierung eine geringe Konvergenzrate. Um zwecks schneller Konver-

genz die Konditionszahl der zu invertierenden Matrix zu verbessern, ist es nötig, kleine Eigenwerte und deren zugehörige Eigenvektoren zu eliminieren. Dies kann auf einfache Weise dadurch geschehen, daß diese zum Nullraum gezählt werden.

Das Kriterium für die Zugehörigkeit eines Eigenvektors zum Nullraum wird damit von  $\lambda_i = 0$  zu  $\lambda_i < \epsilon$  geändert oder zu  $\lambda_1/\lambda_i > 10$ , wenn alle Eigenwerte innerhalb der gleichen Größenordnung liegen sollen.

Die Matrix  $\underline{\underline{V}}_r^T$  transformiert die Modellparameter in die neuen Koordinaten des Unterraumes, in dem das Inversionsproblem zunächst gelöst werden soll. Dementsprechend werden die Einheitsvektoren  $\underline{\hat{x}}_i$  der numerischen Differentiation in Gleichung (4.3) zu  $\underline{\underline{V}}_r^T \underline{\hat{x}}_i$  transformiert, so daß sich die Anzahl der zu bildenden Ableitungen auf  $r$  reduziert. Ist die Lösung in dem durch  $\underline{\underline{V}}_r$  aufgespannten Unterraum gefunden, so kann sich eine weitere verbesserte Lösung nur in dem dazu orthogonalen Unterraum befinden, weshalb für die weitere Optimierung höchstens  $m - r$  Ableitungen gebildet werden müssen. Eine Bildung der Ableitungen in allen  $m$  Dimensionen des Modellparameterraumes ist erst dann nötig, wenn der verbliebene Unterraum nur noch von Eigenvektoren mit Null als zugehörigem Eigenwert aufgespannt werden.

Diese Verfahrensweise wurde auf das schon aus Abschnitt 4.6 bekannte Problem angewandt. Dort wurde demonstriert, daß das Gauß–Newton–Verfahren bei ungeeigneter Wahl des Startwertes nicht konvergiert. In Abbildung 4.1 ist ein solcher Fall dargestellt, der nun durch die Verwendung des Gauß–Newton–Verfahren in Unterräumen gelöst werden soll. Das Verhalten dieses Subraum–Gauß–Newton–Verfahrens wiederum im Vergleich zum Gradientenverfahren zeigt Abbildung 4.2. Im Gegensatz zum konventionellen Gauß–Newton–Verfahren konvergiert das mit Hilfe der SVD modifizierte Verfahren gegen die Lösung. Dabei ist die Orthogonalität der erzeugten Unterräume anhand des rechtwinkligen Verlaufes der Folge der Modellvektoren innerhalb der Konturlinienzeichnung zu erkennen. Auch hier läßt sich gegenüber dem Gradientenverfahren eine höhere Konvergenzrate erzielen.

## 4.8 Joint Inversion

In den bisherigen Betrachtungen wurde der Datenvektor  $\underline{d}$  als Darstellung einer geophysikalischen Messung betrachtet. Bei der gemeinsamen Inversion unterschiedlicher geophysikalischer Methoden, der sogenannten Joint Inversion, ist die unterschiedliche Natur der involvierten physikalischen Vorgänge zu berücksichtigen. Daher reicht es im allgemeinen nicht aus, zwei Verfahren dadurch zu koppeln, daß die jeweiligen Ergebnisse zu einem Datenvektor zusammengefügt werden und der Modellparameterraum entsprechend erweitert wird. Der Einfachheit halber wird hier und im weiteren davon ausgegangen, daß die Joint Inversion von zwei Verfahren durchgeführt werden soll, wobei sich die Betrachtungen in analoger Weise auf mehrere Verfahren erweitern lassen. Da die individuelle Inversion bei-

der Methoden voneinander abweichende Lösungen in den gemeinsamen Modellparametern liefern wird, muß sich als Lösung der Joint Inversion ein „irgendwie gearteter“ Mittelwert ergeben. Dieser wird stark von der Gewichtung der Datenpunkte der einzelnen Methoden im Inversionsprozeß abhängen, wodurch die Frage aufgeworfen wird, nach welchen Kriterien diese Gewichtung festgelegt wird.

Ein einfaches Beispiel soll den Einfluß der Gewichtung verdeutlichen. Sei  $\mathcal{L}^A$  die Fehlerfunktion für die aus den Abschnitten 4.6 und 4.7.4 bekannte refraktionsseismische Messung. Sei ferner eine Schlumberger-Sondierung durchgeführt worden, so daß auch daraus eine Schichtmächtigkeit an der Stelle des seismischen Meßprofils bestimmt wird. Beide Messungen seien mit 10% gaußverteilterm Rauschen behaftet. Abbildung 4.3 zeigt die beiden Fehlerfunktionen, wobei die Parameterkombinationen des zugrundeliegenden Modells jeweils durch ein Kreuz und die Minima der Fehlerfunktionen durch einen Kreis dargestellt sind.

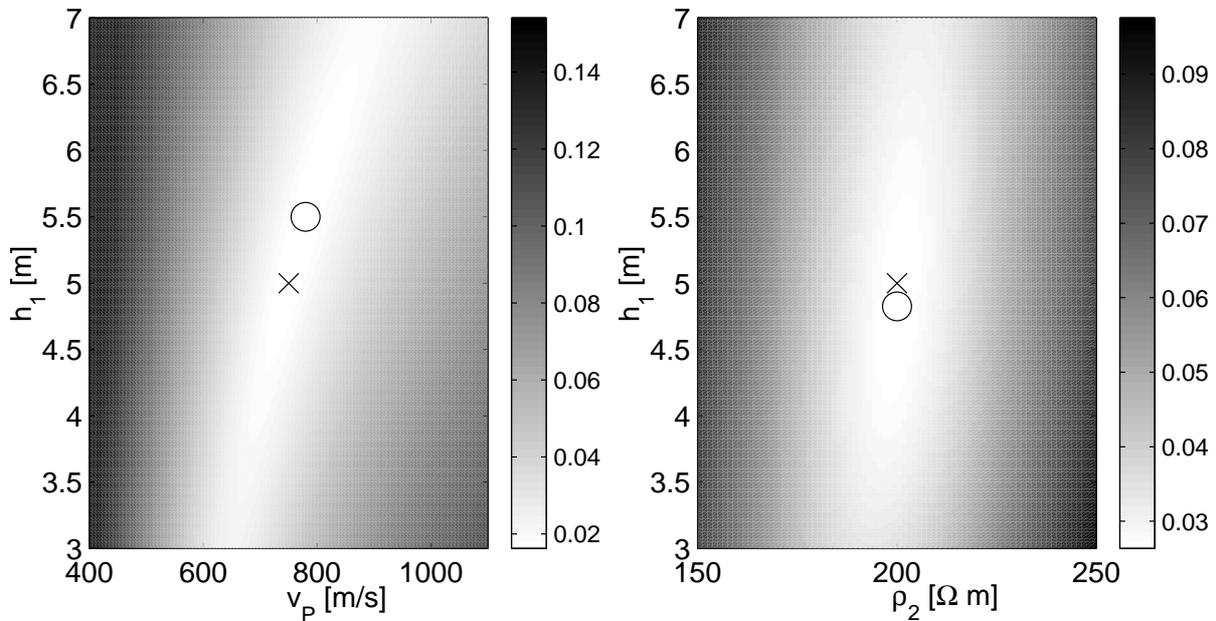


Abbildung 4.3: Fehlerfunktionen der Refraktionsseismik (*links*) und der Geoelektrik (*rechts*). Die korrekten Modellparameter sind durch Kreuze, die Minima der Fehlerfunktionen durch Kreise gekennzeichnet.

Beide Fehlerfunktionen werden nun durch den Gewichtungsfaktor  $\gamma \in [0, 1]$  zu einer gemeinsamen Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  verknüpft, so daß gilt:

$$\mathcal{L} = \gamma \mathcal{L}^A + (1 - \gamma) \mathcal{L}^B. \quad (4.26)$$

Die so erhaltene Fehlerfunktion wird zur Inversion genutzt. Dabei soll das Verhalten des Inversionsergebnisses bei Änderung des Gewichtsparameters  $\gamma$  untersucht werden, wozu die Inversion für unterschiedliche Werte durchgeführt wurde.

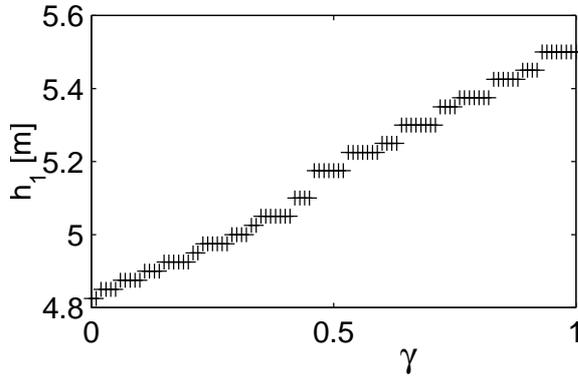


Abbildung 4.4: Bestimmte Mächtigkeit  $h_1$  in Abhängigkeit von  $\gamma$

Die nebenstehende Abbildung zeigt das Inversionsergebnis für die Schichtmächtigkeit  $h_1$  als Funktion des Gewichtungsfaktors  $\gamma$ . Als Extremwerte treten dabei die Ergebnisse der einzelnen Inversionen beider Verfahren auf. Zwischen diesen Extremwerten kann jede beliebige Schichtmächtigkeit durch geeignete Wahl von  $\gamma$  und abhängig von den Eigenschaften der einzelnen Fehlerfunktionen als Ergebnis der gemeinsamen Inversion auftreten. Dieses Verhalten ist insofern ungünstig, da ad hoc kein Kriterium zur geeigneten Wahl von  $\gamma$  angegeben werden kann.

Daher soll zur Joint Inversion ein Algorithmus verwendet werden, der auf die Methodik der Inversion einer einzelnen Methode aufbaut. Dabei sollen im Verlauf der Iterationsfolge  $\underline{m}_k$  der gemeinsamen Modellparameter die Fehler der einzelnen Methoden minimiert werden. Eine Verknüpfung durch einen a priori gewählten Gewichtsparameter findet nicht statt. Ein Abbruch des Algorithmus findet unter der Bedingung statt, daß eine Verringerung des Fehlers einer Methode im Widerspruch zu einer anderen Methode steht, d.h. sich deren Fehler vergrößern würde.

In Abbildung 4.5 ist ein vereinfachtes Flußdiagramm des verwendeten Inversionsalgorithmus für die Inversion zweier Verfahren  $A$  und  $B$  gezeigt. Für mehrere Verfahren kann der Algorithmus analog erweitert werden. Das Flußdiagramm gliedert sich in drei Bereiche, oben der Eingabebereich, darunter die Modellierungen, Bildung der Ableitungen und der Abstiegsrichtung jeweils für die jeweiligen Methoden getrennt ausgeführt und schließlich im unteren Teil des Diagramms die eigentlichen Iterationsvorschriften. Im folgenden soll dieser Algorithmus detaillierter betrachtet werden. Die Eingabeschnittstellen zum Benutzer bedürfen dabei wohl keiner weiteren Erläuterung, gleichfalls auch nicht die Modellierungen, welche ausführlich in Kapitel 3 beschrieben wurden. Zur Bestimmung der Abstiegsrichtung für die einzelnen Methoden erfolgt zunächst die Bildung des Gradienten  $\nabla \mathcal{L}$  und des Modellverbesserungsvektors nach dem Gauß-Newton-Verfahren  $[\underline{\underline{F}}'^T \underline{\underline{F}}']^{-1} \underline{\underline{F}}'^T \Delta \underline{d}$ . Durch Bildung des Skalarproduktes zwischen beiden Richtungen wird überprüft, ob die Lösung des Gauß-Newton-Verfahrens eine Abstiegsrichtung darstellt. Ist dies nicht der Fall kann eine Abstiegsrichtung durch Verwendung des Subraum-Gauß-Newton-Verfahrens oder alternativ durch Gleichsetzen mit dem Gradienten gefunden werden. Sind die Abstiegsrichtungen  $\underline{1}^A$ ,  $\underline{1}^B$  für beide Verfahren bestimmt, werden eine Reihe von Fallunterscheidungen durchgeführt. Im ersten Fall gilt:  $\mathfrak{P}_r^B \underline{1}^A = \underline{0}$  und  $\mathfrak{P}_r^A \underline{1}^B = \underline{0}$ . Das heißt, der Projektionsoperator auf den relevanten Modellparameterraum der Methode  $B$ , angewandt auf die Abstiegsrichtung der Methode  $A$ , liefert den Nullvektor; gleichzeitig gilt dies auch für die Anwendung

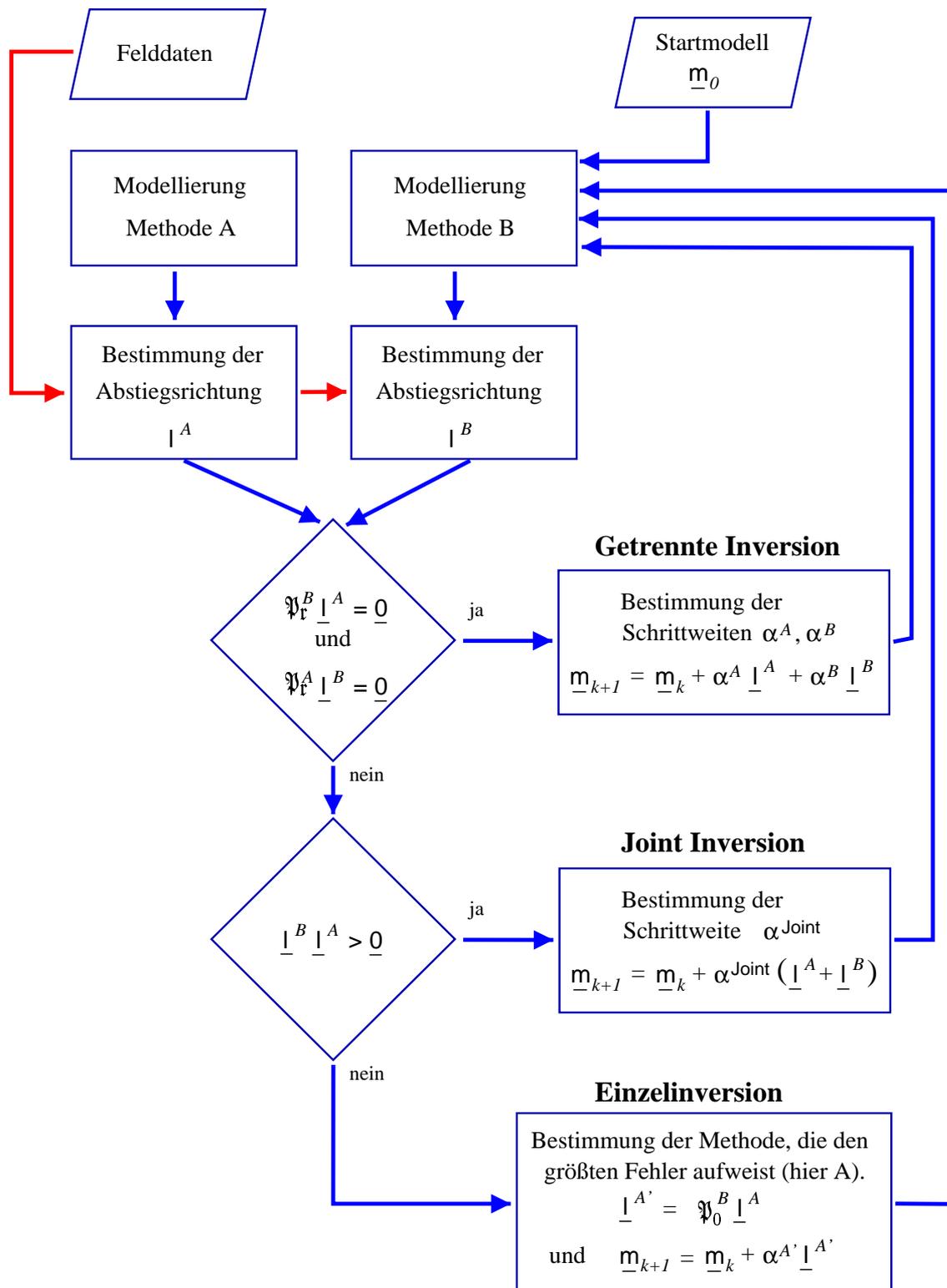


Abbildung 4.5: Flußdiagramm des verwendeten Inversionsalgorithmus.

des Projektionsoperators auf den relevanten Modellparameterraum der Methode  $A$ , angewandt auf die Abstiegsrichtung der Methode  $B$ . In diesem Fall können beide Methoden völlig unabhängig voneinander betrachtet werden, da sie beide offensichtlich von orthogonalen Modellparameterräumen abhängen. Die Schrittweite ist bei Verwendung der Gauß-Lösung für beide Verfahren schon festgelegt und muß nur bei der Verwendung des Gradienten durch eine entsprechende Schrittweitenregel bestimmt werden.

Gelten die Bedingungen für den Fall 1 nicht, so sind die Erkundungsmethoden  $A$  und  $B$  von gemeinsamen Parametern abhängig. Dies ist der Fall, der zum Zwecke der Joint Inversion angestrebt wird. Als weitere Bedingung in diesem zweiten Fall sollen die Abstiegsrichtungen der Methoden die Ungleichung  $\lfloor^{B^T} \rfloor^A > 0$  erfüllen. Durch diese Bedingung ist gewährleistet, daß während des Verfahrens die Kombination beider Methoden eine gemeinsame Abstiegsrichtung liefern, so daß der Fehler in jedem Schritt für beide Methoden simultan reduziert wird. Damit wird die Möglichkeit ausgeschlossen, daß der Fehler einer Methode auf Kosten der anderen verringert wird. Die Kombination der Abstiegsrichtungen der einzelnen Methoden liefert die gemeinsame Abstiegsrichtung, wobei für diese neue Richtung eine entsprechende Schrittweite  $\alpha^{\text{Joint}}$  durch die in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Methoden zu finden ist.

Wird auch die Bedingung für den zweiten Fall nicht erfüllt, was z.B. dann auftritt, wenn eine Methode schon ein lokales Minimum erreicht hat, führt dies abschließend auf den dritten Fall. An diesem Punkt der Iterationsfolge ist es nicht mehr möglich, die Anpassungsfehler beider Methoden an die Daten gleichzeitig zu reduzieren. Sei dabei beispielsweise Methode  $A$  mit dem größeren Anpassungsfehler behaftet. Es besteht nun noch die Möglichkeit, die Anpassung für Methode  $A$  weiter zu verbessern, ohne das Resultat für Methode  $B$  zu verändern. Wie Rowbotham & Pratt (1997) für die Methode der Laufzeit-Tomographie zeigten, können die Modellparametervektoren in eine gewünschte Richtung verändert werden, ohne den Anpassungsfehler zu vergrößern, solange die Anpassungsrichtung im Nullraum liegt. Die gewünschte Richtung wird im Falle der Joint Inversion durch die Anpassung der weiteren Methoden festgelegt, also in diesem Beispiel durch Methode  $A$ . Um die obige Bedingung zu erfüllen, wird die durch Methode  $A$  bestimmte Abstiegsrichtung des Modellparametervektors durch den Operator  $\mathfrak{P}_0^B$  auf den Nullraum der Methode  $B$  projiziert. Wie gewohnt, erfolgt die Ermittlung einer adäquaten Schrittweite für die so gefundene Richtung.

Sind die Abstiegsrichtungen und Schrittweiten bestimmt, wird der Nachfolger des Modellparametervektors durch Gleichung (4.11) berechnet und die Iteration fortgeführt, bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist.

## 4.9 Inversion von Rayleigh–Wellen

Eine einfache Methode zur Analyse von Oberflächenwellen ist die Schätzung der Gruppenlaufzeiten der verschiedenen Moden in Abhängigkeit von der Frequenz. Diese Methode benötigt nur eine seismische Spur als Eingabe, wodurch man eine Änderung des Dispersionsverhaltens von Spur zu Spur erkennen kann. Abbildung 4.6 zeigt in einem Flußdiagramm eine Übersicht über die Signalanalyse und Signalsynthese sowie deren Einsatz zur Interpretation von Oberflächenwellen.

Um prinzipiell Aussagen über die Frequenzabhängigkeit der Gruppenlaufzeiten zu machen, benötigt man eine Transformation des Signals aus dem Zeit–Bereich in den Zeit–Frequenz–Bereich. Diese Aufgabe kann mit verschiedenen Ansätzen gelöst werden, wobei die jeweiligen Transformationen unterschiedliche Bedingungen z.B. bezüglich der Erhaltungssätze erfüllen. Da zu einem späteren Zeitpunkt sowohl Linearität als auch Energieerhaltung gefordert werden, soll folgendes Transformationspaar betrachtet werden:

$$P[t_i, \nu_j] = \sum_k z[t_k] \psi_s^*[t_k - t_i] e^{-2\pi i \nu_j t_k} \quad (4.27)$$

$$z[t_i] = \sum_k \sum_j P[t_k, \nu_j] \psi_s[t_i - t_k] e^{2\pi i \nu_j t_k}. \quad (4.28)$$

Gleichung (4.27) ist die diskrete Analysetransformation, die das Signal in elementare Komponenten, sogenannte „Wavelets“, zerlegt. Die Wavelets sind jeweils in der Zeit–Frequenz–Ebene bis auf eine gewisse Unschärfe um einen Zeitpunkt  $t_i$  und eine Frequenz  $\nu_j$  lokalisiert.  $P[t_i, \nu_j]$  ist eine komplexe Größe und enthält die Amplituden– und Phaseninformation über das zugeordnete Wavelet. Der Absolutbetrag  $||P[t_i, \nu_j]||$  kann als Energiedichte des Signals in dem jeweiligen Zeit–Frequenz–Intervall gedeutet werden, weshalb ich im folgenden  $||P[t_i, \nu_j]||$  als Energiedichteverteilung oder kurz Verteilung bezeichnen werde. Gleichung (4.28) ist die Umkehrfunktion oder Synthesetransformation der Gleichung (4.27).

Neben der Linearität wird auch die Energieerhaltung erfüllt, wenn die Fensterfunktion  $\psi_s$  folgender Bedingung genügt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_s(t') \psi_s^*(t') dt' = 1. \quad (4.29)$$

Ein Einsetzen von Gleichung (4.27) in (4.28) ergibt offensichtlich unter Verwendung von (4.29) die Identität. In dieser Arbeit findet das Morlet-Wavelet

$$\psi_{s(t_i-t')} = (s \pi)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{(t_i-t')^2}{s}} \quad (4.30)$$

Verwendung (Grossmann et al. (1989)), welches Bedingung (4.29) erfüllt.

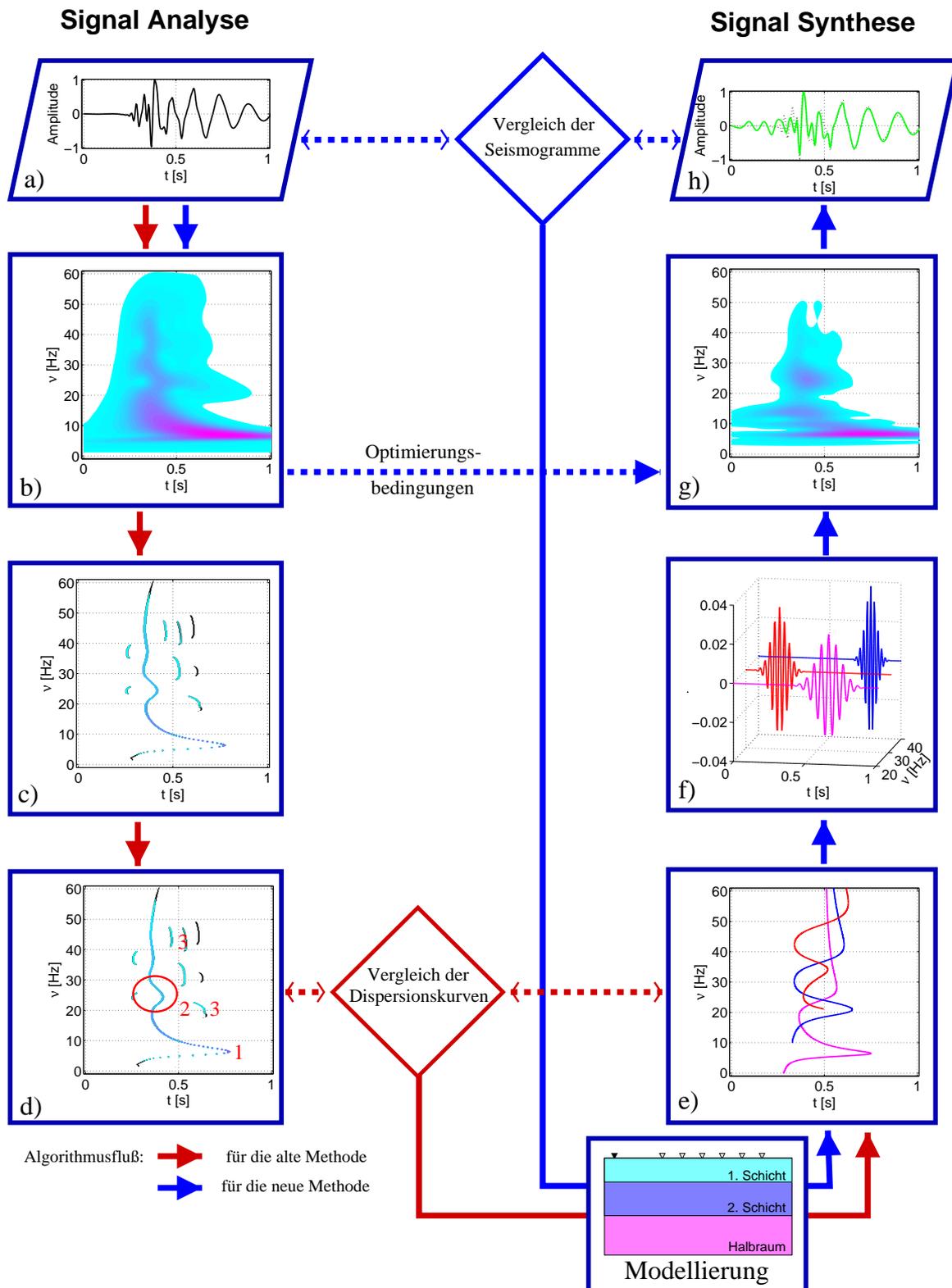


Abbildung 4.6: Inversionsschema nach Tillmann (2000) für die konventionelle und die hier vorgestellte Methode. Die Beschreibung der einzelnen Schritte findet sich im Text.

Die Fensterfunktion  $\psi_s$  kann durch den Skalenfaktor  $s$  hinsichtlich der Ausdehnung in Zeit und Frequenz beeinflußt werden. Durch die Unschärferelation  $\Delta t \cdot \Delta \nu \geq \text{const.}$  geht eine genauere Lokalisation des Wavelets in der Zeit mit einer Verbreiterung seines Spektrums einher und umgekehrt.

Die Zeit–Frequenz–Analyse ist sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich implementierbar, mit einem konstanten oder frequenzabhängigen Skalenfaktor. In der Literatur sind diese Verfahren daher unter verschiedenen Namen bekannt. Die „Moving Window Analyse“ (Landisman et al. (1969)) verwendet eine Fensterfunktion im Zeitbereich, so daß nur kurze Ausschnitte des Seismogramms der Spektralanalyse unterzogen werden. Die „Multiple Filter Technik“ (Dziewonski et al. (1969)) arbeitet im Frequenzbereich und verwendet dort eine frequenzabhängige Fensterfunktion als schmalbandiges Filter. Die Frequenzabhängigkeit ist so konstruiert, daß die Zeitauflösung mit steigender Frequenz erhöht wird, so daß die Frequenzauflösung in Oktaven gerechnet konstant bleibt. Ergebnis der Bemühungen um Zeit–Frequenz–Analysemethoden in den unterschiedlichen Disziplinen der Naturwissenschaften ist die „Continuous Wavelet Transformation“, kurz CWT, (Delprat et al. (1992), Chui (1992)), die eine vereinheitlichte Formulierung im Sinne einer Integraltransformation darstellt und das heutige Standardwerkzeug ist.

Abbildung 4.6 gibt einen Überblick über die in diesem Abschnitt dargestellte Methodik der Signalanalyse und –synthese, eingebettet in das Ablaufschema der Inversion. Ausgangspunkt ist ein synthetisches Seismogramm (Abb. 4.6a), welches in den  $t$ – $\nu$ –Bereich transformiert wird. Den Absolutbetrag  $||P[t_i, \nu_j]||$  des transformierten Seismogramms zeigt Abb. 4.6b. Da die Energie in einem Wellenpaket mit der Gruppengeschwindigkeit durch den Raum transportiert wird, geht man bei der Interpretation von  $P[t_i, \nu_j]$  davon aus, daß Maxima der Verteilung als Maxima einer Signalkomponente betrachtet werden können und somit zur Bestimmung der Gruppenlaufzeiten in Abhängigkeit von der Frequenz genutzt werden können (Kennett (1976)). Deshalb wurden die Maxima von  $||P[t_i, \nu_j]||$  bestimmt und in Abb. 4.6c dargestellt. Diese Maxima werden als Teile von Dispersionskurven betrachtet und für die Inversion genutzt. Zuvor müssen aber anhand der in Abb. 4.6c enthaltenen Informationen die Energiemaxima den einzelnen Moden der Dispersionskurven zugeordnet werden. Eine Aufgabe, die interaktiv durchgeführt werden muß und einige Probleme beinhaltet:

1. Während die komplexe Verteilung  $P[t_i, \nu_j]$  linear vom Seismogramm  $z[t_i]$  abhängig ist, gilt dies nicht für den Absolutbetrag. Überlagern sich zwei Signalkomponenten in einem Frequenzband, so bewirkt der Mischterm bei der Quadrierung eine zeitliche Verschiebung des Maximums des Absolutbetrages an dieser Stelle. Aus diesem Grund ist es nur in den Bereichen statthaft, den obigen Ansatz zur Bestimmung der Gruppenlaufzeiten anzuwenden, in denen nur eine Mode der Oberflächenwellen enthalten ist. Dieser Bereich ist in Abb. 4.6d mit „1“ gekennzeichnet. In den anderen Bereichen der Zeit–Frequenz–Ebene ist es notwendig, spezielle Verfahren zur Schätzung der Dispersionskurven einzusetzen (Tillmann (1997)).

2. Aus Punkt 1 ergibt sich für den interpretierenden Geophysiker sofort ein weiteres Problem. Er muß entscheiden, ob Signalanteile zu einer oder zu mehreren Moden gehören und, diese Frage ist sehr viel schwieriger zu beantworten, welcher Mode sie zuzuweisen sind. Der mit „2“ gekennzeichnete Bereich in Abb. 4.6d ist eine starke Interferenz zwischen zwei Signalen. Obwohl man anhand der geschätzten Maxima der Energiedichteverteilung eine durchgehende Dispersionskurve zu sehen glaubt, sind die eingezeichneten Maxima für Frequenzen oberhalb von 20 Hz keiner der theoretischen Dispersionskurven in Abb. 4.6e zuzuordnen.
3. Weiterhin sind nur sehr schmalbandig angeregte oder durch Interferenz teilweise ausgelöschte Signale, wie die mit „3“ in Abb. 4.6d gekennzeichneten Anteile, nicht interpretierbar.

Eine neue Methode soll die oben beschriebenen Probleme beheben. Zum einen wird recht schnell klar, daß sich die Interpretation auf die komplexe Verteilung beziehen muß, und nicht auf deren Betrag. Zum anderen ist deutlich gezeigt, daß eine Zuordnung von Signalanteilen zu den Dispersionskurven der einzelnen Moden sehr fehlerträchtig ist. Eine Möglichkeit zur Lösung dieser Probleme wäre die Berechnung des gesamten Seismogramms anhand des Modells. Dieser Prozeß benötigt allerdings eine um Größenordnungen höhere Rechenzeit als die alleinige Berechnung der Dispersionskurven. Für einen Inversionsprozeß bedeutet dieser Ansatz einen zur Zeit noch unvertretbaren Aufwand.

Daher soll folgendes von mir neu entwickelte Verfahren vorgestellt werden: Durch die Gleichung (4.28) ist die Synthese eines Seismogramms aus der Zeit–Frequenz–Darstellung  $P'[t_i, \nu_j]$  definiert. Diese sogenannte „Gabor Repräsentation“ des Seismogramms ist vollständig, solange für die Abtastung der Verteilung  $\Delta t \cdot \Delta \nu < 1$  gilt. Da  $P[t_i, \nu_j]$  in der Implementierung immer feiner abgetastet werden muß als es dieses Kriterium erforderlich macht, enthält diese Repräsentation des Seismogramms immer Redundanz, d.h., es existieren mehrere Verteilungen, die zu identischen Seismogrammen führen.

Idealerweise bestünde  $P'[t_i, \nu_j]$  aus Wavelets zu den Zeiten  $t_i$  und Frequenzen  $\nu_j$ , die durch die Dispersionskurven der Gruppenlaufzeiten bestimmt sind und die nur für diese Zeit–Frequenz–Paare eine Amplitude  $a_{i,j} > 0$  haben. In einem ersten Schritt werden die Dispersionskurven bestimmt (Abb. 4.6e) und aus den so festgelegten Zeit–Frequenz–Paaren unter Verwendung der in der Analyse verwendeten Wavelets (Abb. 4.6f) eine Verteilung:

$$P'[t_i, \nu_j] = \sum_k a_{k,j} \psi_s^*[t_k - t_i] e^{2\pi i \nu_j t_k} \quad (4.31)$$

erzeugt. Die unbekanntenen Amplituden  $a_{k,j}$  werden durch die Lösung des Optimierungsproblems:

$$\|P[t_k, \nu_j] - P'[t_k, \nu_j]\| \stackrel{!}{=} \min. \quad \text{und} \quad a_{k,j} \geq 0 \quad (4.32)$$

ermittelt. Durch diese Verfahrensweise erhält man die in Abb. 4.6g gezeigte Verteilung  $P'[t_i, \nu_j]$ , die die gemessene Verteilung  $P[t_i, \nu_j]$  am besten unter Verwendung eines bestimmten Modells erklärt. Durch die Synthesgleichung (4.28) ist damit auch das am besten angepaßte Seismogramm bestimmt (Abb. 4.6h). Man erhält also pro Modell eine Verteilung und ein Seismogramm. Die grundlegende Idee, diese Methode zum Zwecke der Inversion zu benutzen, besteht nun darin, daß eine weitere Verminderung eines Abstandes zwischen dem gemessenen und dem synthetisierten Seismogramm nur durch eine Relokation der Wavelets erreicht werden kann. Da die Lokationen der Wavelets in der Zeit-Frequenzebene durch die Dispersionskurven bestimmt sind, muß das Modell in geeigneter Weise verändert werden. Daraus folgt, daß eine Minimierung des Fehlers zwischen gemessenem und synthetisiertem Seismogramm auf ein Modell führt, welches dem wahren Untergrundmodell entspricht.

Um diese These zu stützen, wurde das oben beschriebene Verfahren an einem synthetischen Datensatz getestet. Das dem Datensatz zugrundeliegende Modell ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Das daraus berechnete Seismogramm, die dazugehörige CWT, die Dispersionskurven etc. sind im Ablaufschema des Inversionsverfahrens in Abbildung 4.6 gezeigt. Um das Verhalten des oben beschriebenen Verfahrens anschaulich darzustellen, wurden, ausgehend vom exakten Modell, jeweils zwei Modellparameter in einem weiten Bereich variiert. Für diese veränderten Modellparameter wurde die optimale Energiedichtevertelung  $P'[t_i, \nu_j]$  bestimmt. Das zugehörige Seismogramm  $z'[t_i]$  ergibt sich dann aus Gleichung (4.28).

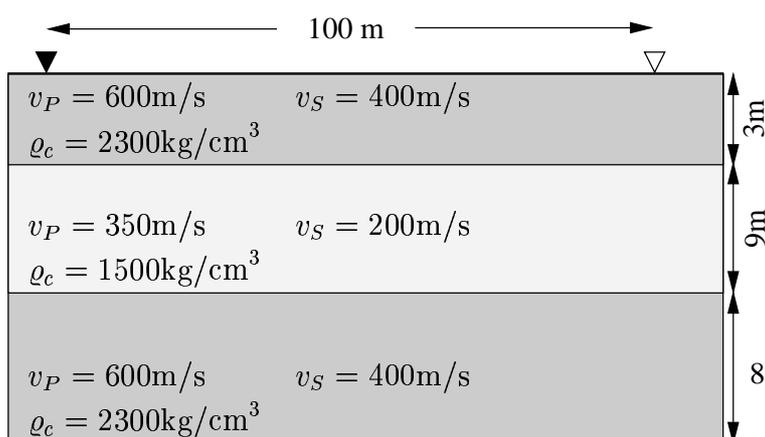


Abbildung 4.7: Das zur Modellierung des Seismogramms zugrundegelegte Modell eines Niedergeschwindigkeitskanals in einem Halbraum. Der Abstand zwischen Quelle und Geophon beträgt 100m.

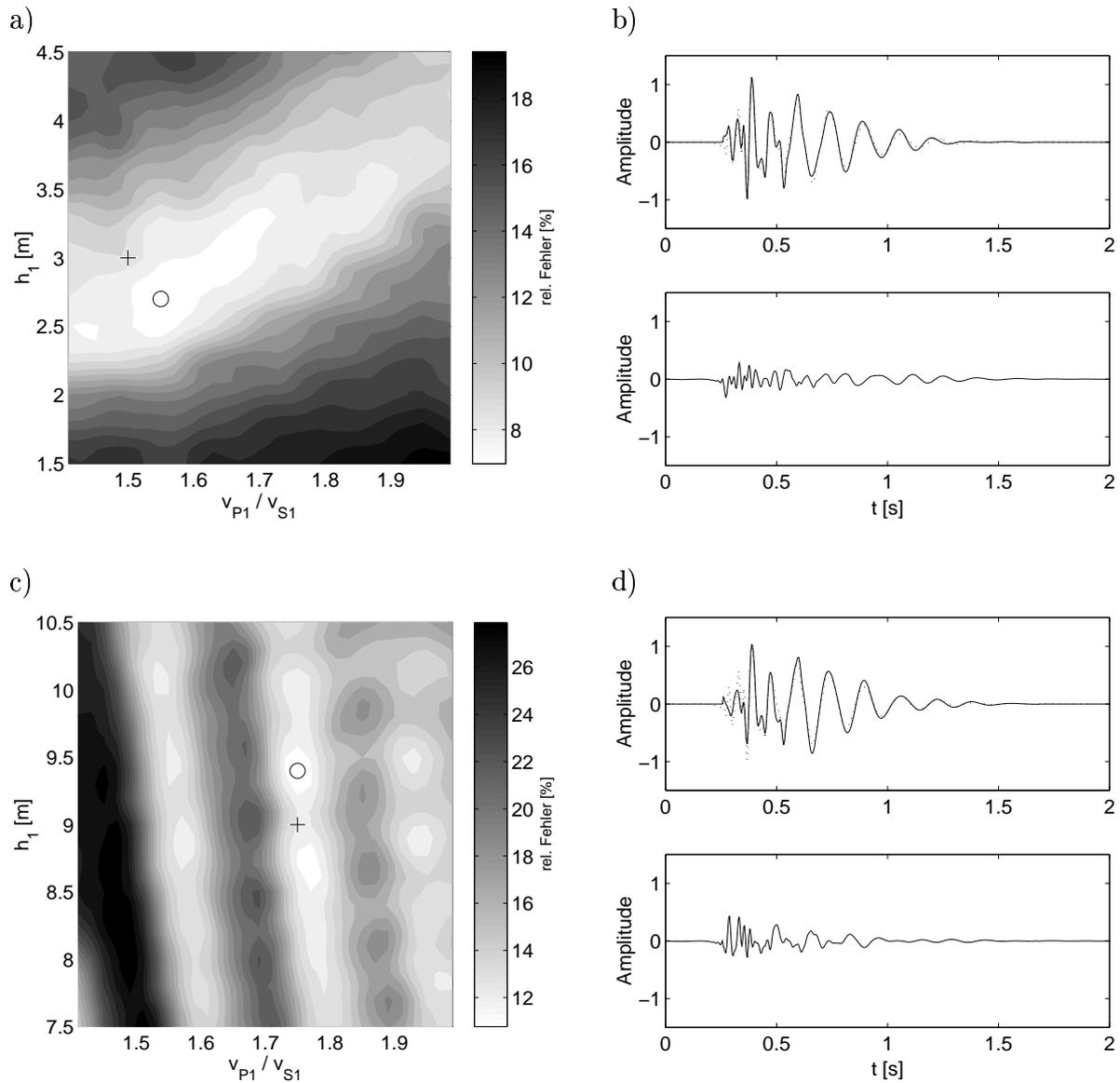


Abbildung 4.8: Die Fehlerfunktionen in Schnitten durch den Modellparameterraum. In a) die Variation der Mächtigkeit  $h_1$  und des  $v_P/v_S$ -Verhältnisses in der 1. Schicht. In c) die Variation der Mächtigkeit  $h_2$  und des  $v_P/v_S$ -Verhältnisses in der 2. Schicht. Die Minima der Fehlerfunktionen sind durch ein  $\circ$ , die exakten Lösungen jeweils durch ein  $+$  gekennzeichnet. In b) und d) *oben* sind jeweils die synthetischen Seismogramme  $z[t_i]$  (gepunktet) im Vergleich zum Seismogramm der Lösung  $z'[t_i]$  (durchgezogen) gezeigt, während jeweils *unten* die Differenzsignale gezeichnet sind.

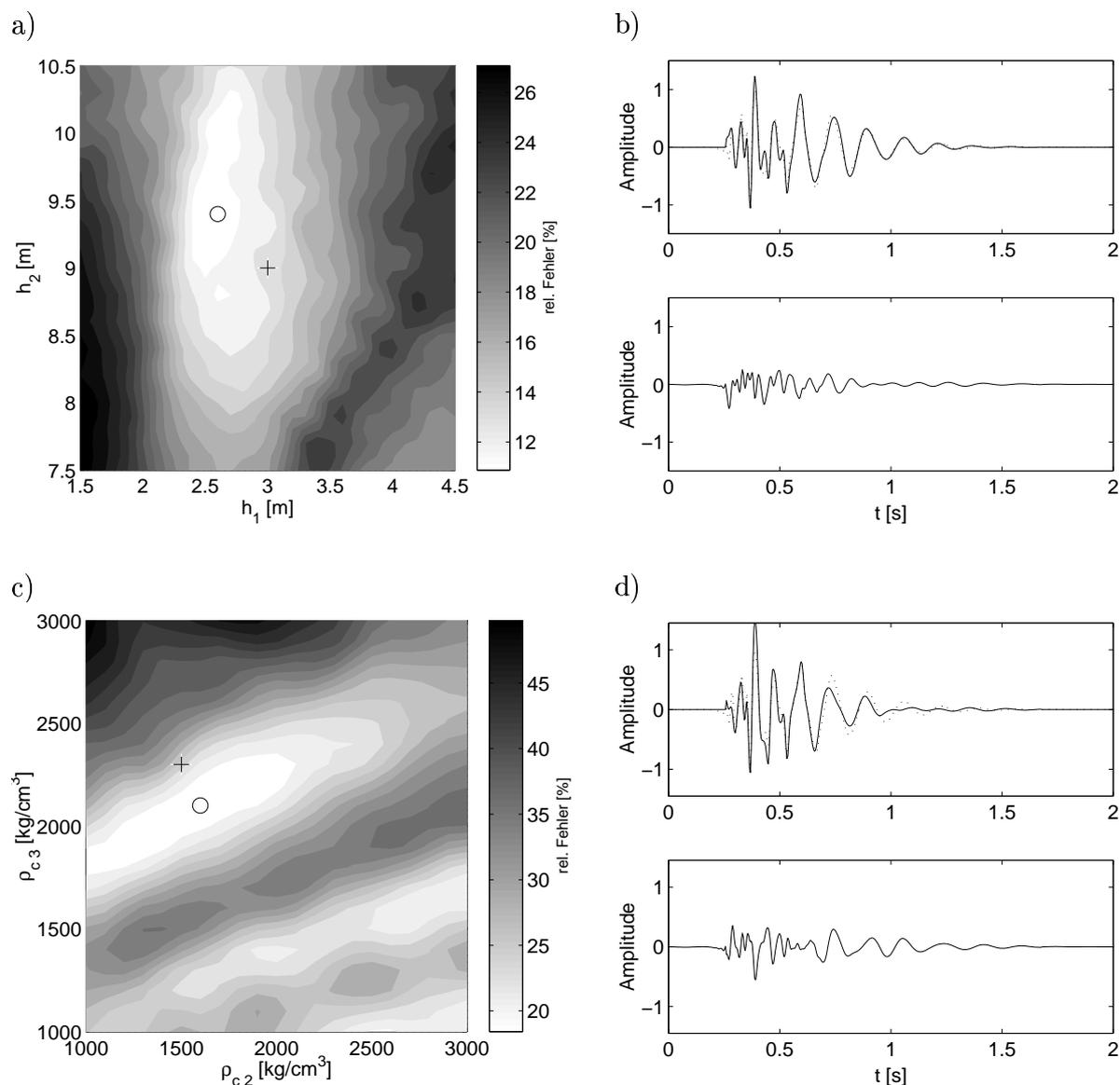


Abbildung 4.9: Die Fehlerfunktionen in Schnitten durch den Modellparameterraum. In a) die Variation der Mächtigkeiten  $h_1, h_2$  der 1. und 2. Schicht. In c) die Variation der Dichten  $\rho_{c2}, \rho_{c3}$  der 2. Schicht und des Halbraumes. Die Minima der Fehlerfunktionen sind durch ein  $\circ$ , die exakten Lösungen jeweils durch ein  $+$  gekennzeichnet. In b) und d) *oben* sind jeweils die synthetischen Seismogramme  $z[t_i]$  (gekennzeichnet durch gepunktete Linien) im Vergleich zum Seismogramm der Lösung  $z'[t_i]$  (durchgezogene Linie) gezeigt, während jeweils *unten* die Differenzsignale gezeichnet sind.

Als relativer Fehler  $\hat{\mathcal{L}}_r$  an diesem Punkt des Modellparameterraumes definiere ich das Verhältnis der Energien des Differenzsignals  $z[t_i] - z'[t_i]$  und des synthetischen Seismogramms  $z[t_i]$ :

$$\hat{\mathcal{L}}_r = \frac{\sum_i (z[t_i] - z'[t_i])^2}{\sum_i z[t_i]^2}. \quad (4.33)$$

Die daraus resultierenden zweidimensionalen Schnitte durch die Fehlerfunktion sind in den Abbildungen 4.8 und 4.9 dargestellt. Allen untersuchten Schnitten ist gemein, daß das globale Minimum der Fehlerfunktion innerhalb der Schnittebene in der Nähe der exakten Lösung liegt und das zur Lösung gehörige Seismogramm das zu invertierende Seismogramm in seiner Wellenform anpaßt. Das in den Abbildungen dargestellte Differenzsignal zeigt über die gesamte Signaldauer hinweg gleichmäßig niedrige Amplituden. Die Tatsache, daß das exakte Modell durch dieses Verfahren nicht wieder rekonstruiert werden kann, hat vielfältige Ursachen. Numerische Ungenauigkeiten bei der Modellierung des Seismogramms und der Berechnung der Dispersionskurven sind dabei zu vernachlässigen sind. Die CWT, die zur Analyse des synthetischen Seismogramms verwendet wird, besitzt ein eingeschränktes Auflösungsvermögen in Zeit und Frequenz, welches zum einen durch die Unschärferelation der Fourier-Transformation und zum anderen durch die Abtastrate und die Signallänge bestimmt wird. Zusätzlich kann das Verhältnis der zeitlichen Auflösung zur Auflösung der Frequenz durch den Skalenfaktor  $s$  beeinflußt werden. Auch die Belegung der Zeit-Frequenzebene (siehe Abbildung 4.6f) mit Wavelets erfolgt nur an den durch die diskrete CWT festgelegten Punkten. Ferner kann man in der Abbildung 4.8c eine Periodizität der lokalen Minima der Fehlerfunktion erkennen. Das heißt in diesem Beispiel, daß sich für Startmodelle mit unterschiedlich angenommenen Verhältnissen von  $v_P/v_S$  in der 2. Schicht jeweils unterschiedliche Lösungen ergeben. Diese Lösungen passen das Seismogramm ähnlich gut an, allerdings mit einer unterschiedlichen Zuordnung der Signalanteile zu den einzelnen Moden.

# Kapitel 5

## Anwendungen

### 5.1 Übersicht

Motiviert durch die Problematik der Joint Inversion wurde in den vorherigen Kapiteln eine Methodik der Modellierung und Inversion entwickelt, mit deren Anwendung sich dieses Kapitel beschäftigt. Da die Gültigkeit der durchgeführten Modellierungen die Vertrauenswürdigkeit des Inversionsergebnisses bestimmt, soll anhand numerischer Experimente das Verhalten der unterschiedlichen Modellvorstellungen untersucht werden. Dabei werden die Verteilungen der physikalischen Parameter, die mit Hilfe des in Kapitel 2 entwickelten Gesteinsmodell berechnet wurden, dem konventionellen Konzept der unsteiligen Parameterverteilung im Untergrund mit genau lokalisierten Grenzflächen, an denen sich die physikalischen Parameter sprunghaft ändern, gegenübergestellt. In Abschnitt 5.2 wird deshalb die Diskrepanz zwischen den Modellvorhersagen in Abhängigkeit von der Kornverteilung des Bodens bestimmt. Anschließend können eine Reihe von Bedingungen formuliert werden, unter denen beide Modellierungsansätze äquivalente Ergebnisse liefern. In Abschnitt 5.3 wird anhand einer systematischen Untersuchung durch Modellierung mit dem Bodenmodell und anschließender Inversion mit dem Grenzflächenansatz gezeigt, welche Auswirkungen eine Verletzung der in 5.2 formulierten Bedingungen auf das Inversionsergebnis hat. In Abschnitt 5.4 wird daraufhin eine Joint Inversion eines synthetischen Datensatzes mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Algorithmus durchgeführt, um dessen Verhalten zu veranschaulichen. Abschließend erfolgt in Abschnitt 5.5 die Interpretation eines Feldfalles mit diesem Verfahren.

## 5.2 Modell eines Grundwasserspiegels im Halbraum

In den Kapiteln 2, 3 und 4 wurde das theoretische Werkzeug entwickelt, um die physikalischen Eigenschaften eines Gesteinsmodell vorherzusagen und aus geophysikalischen Messungen an dessen Oberfläche auf diese Eigenschaften zurückzuschliessen. Um die prinzipiellen Auswirkungen dieses Sedimentmodells darzulegen, soll zunächst ein sehr einfaches Modell betrachtet werden. Das einfachste geologische Modell besteht aus einem Halbraum mit einer homogenen Verteilungen der Parameter. Für die Modellierungen in diesem Abschnitt wurde ein mittlerer Kornradius von  $r_{k,50} = 20\mu\text{m}$  und eine Verteilungsbreite von  $s_k = 0,5$  angenommen. Die übrigen Parameter entsprechen der Tabelle 2.2

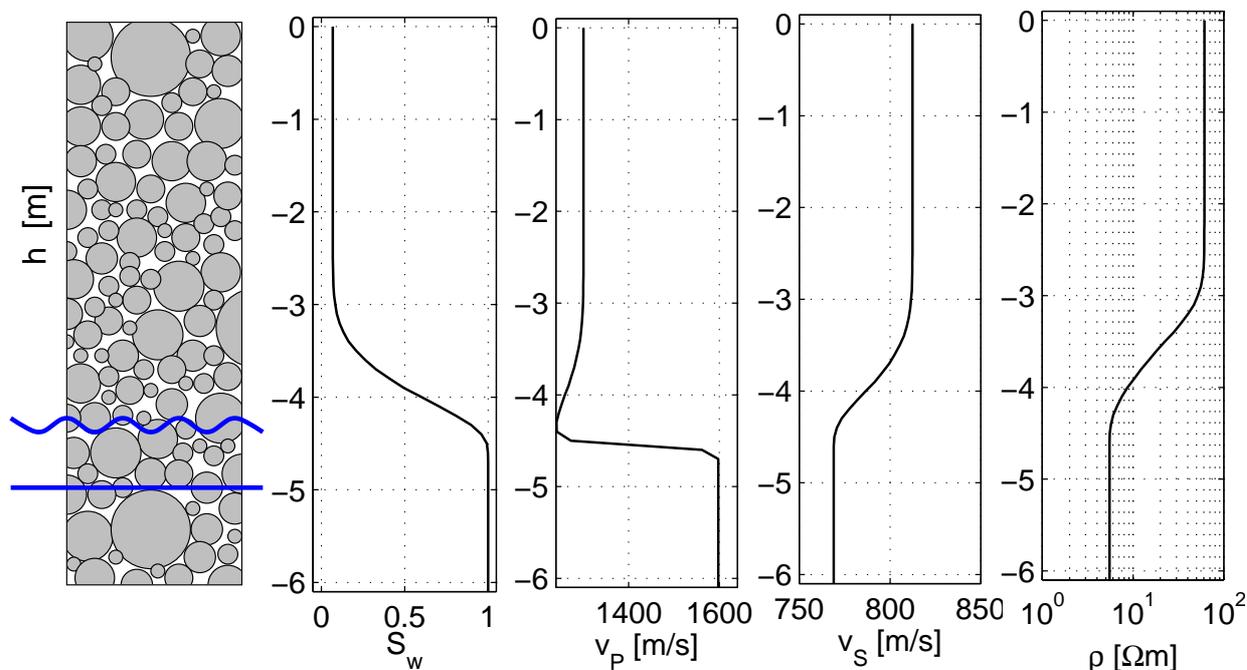


Abbildung 5.1: Verteilung der Parameter als Funktion der Tiefe berechnet für eine Grundwasseroberfläche in 5m Tiefe. Die wellenförmige Linie bezeichnet die scheinbare Grundwasseroberfläche.

auf Seite 39. In diesem Halbraum soll sich eine Grundwasseroberfläche befinden, deren Tiefe zwischen 2,50m und 20m schwankt. Abbildung 5.1 zeigt die berechneten Modellparameter  $S_w$ ,  $v_P$ ,  $v_S$  und  $\rho$  für eine angenommene Grundwasseroberfläche von 5m. Man sieht, daß, bedingt durch die Kapillarkräfte im Porenraum, die Grundwasseroberfläche angehoben wurde. Den Übergang zu Sättigungsgraden  $>0,99$  definiere ich daher als neue, scheinbare Grundwasseroberfläche, welche in einer Tiefe von 4,50m lokalisiert ist. Wie in Abschnitt 2.2.5 gezeigt, zeichnet sich die scheinbare Grundwasseroberfläche durch eine

sprunghafte Veränderung der P-Wellengeschwindigkeit aus. Ferner befindet sich oberhalb der Grundwasseroberfläche ein ausgeprägter Sättigungsgradient, so daß sich die physikalischen Parameter als Funktion des Sättigungsgrades stetig verhalten und keine sprunghaften Änderungen, wie sonst in Schichtmodellen angenommen, stattfinden. Um diese Situation dennoch durch Algorithmen zu modellieren, die auf dem Schichtmodell aufbauen, wird das stetige Modell durch Schichten mit einer Mächtigkeit von 0,05m diskretisiert.

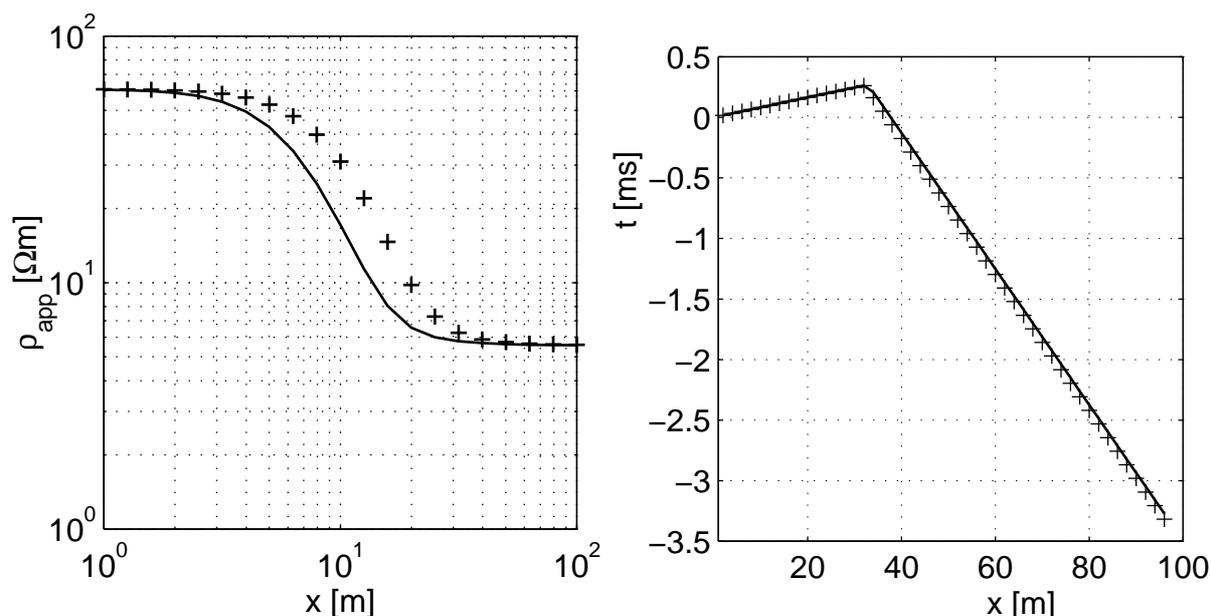


Abbildung 5.2: Unterschiede zwischen den Modellierungsverfahren: Die Kreuze (+) kennzeichnen die Ergebnisse unter Vernachlässigung, durchgezogene Linien die Resultate unter Berücksichtigung der Kapillarkräfte. *Links* : Schlumberger-Sondierungskurven. *Rechts* : Reduzierte Laufzeitkurven

Anhand dieses Modells soll nun geklärt werden, in welcher Größe Abweichungen in den Modellierungen der Refraktionsseismik und der Geoelektrik zu erwarten sind, wenn man einerseits die obigen Parameterfunktionen und andererseits ein herkömmliches Schichtenmodell verwendet. Dazu wurden Modellierungen mit beiden Ansätzen durchgeführt. Für das Schichtenmodell wurde ein Zweischichtfall zugrundegelegt, wobei die Schichtgrenze durch die scheinbare Grundwasseroberfläche, also in diesem Fall 4,50m, festgelegt wird. Für die Geoelektrik ergeben sich zwei Schlumberger-Sondierungskurven, die in Abbildung 5.2 dargestellt sind. Die resultierende Sondierungskurve des durch die kontinuierlichen Parameterfunktionen beschriebenen Modells wird durch die durchgezogene Linie dargestellt, während die Kreuze das Ergebnis des Schichtmodells repräsentieren. Es ist deutlich ersichtlich, daß die beiden Resultate erheblich voneinander abweichen. Obwohl die Anhebung der Grundwasseroberfläche bereits berücksichtigt wurde, wird für das Schichtmodell eine Veränderung des scheinbaren spez. Widerstandes erst für größere Auslagen  $x$  vorhergesagt. Was das im Rahmen der Inversion bedeutet wird zu einem späteren

Zeitpunkt untersucht. Im Gegensatz dazu unterscheiden sich die modellierten Laufzeitkurven für die Refraktionsseismik nur in einem derart geringen Maße, daß in Abbildung 5.2 reduzierte Laufzeitkurven dargestellt sind, um den Unterschied sichtbar zu machen. Es wurde dazu eine Reduktionsgeschwindigkeit von 1300 m/s gewählt.

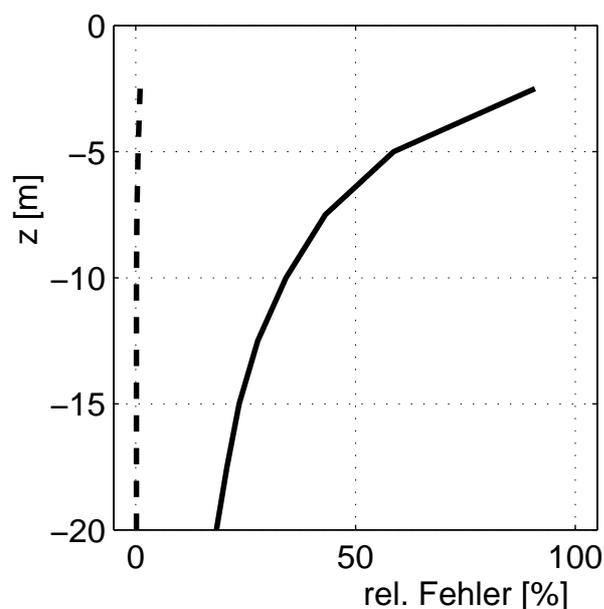


Abbildung 5.3: Relative Abweichung als Funktion der Tiefe

Zunächst soll die Diskrepanz zwischen beiden Modellierungsansätzen in Abhängigkeit von der Kornverteilung und der Tiefe der Grundwasseroberfläche quantifiziert werden. Dazu wurde die Tiefe der Grundwasseroberfläche für das obige geologische Modell im Bereich von 2,50m bis 20m variiert und der zugehörige relative Fehler zwischen beiden Modellierungsmethoden ermittelt. Der relative Fehler als Funktion der Tiefe der Grundwasseroberfläche ist in Abbildung 5.3 dargestellt. Die durchgezogene Linie repräsentiert den Fehler zwischen den Modellierungen der Geoelektrik, die gestrichelte Linie den Fehler zwischen den Modellierungen der Refraktionsseismik.

Wie schon weiter oben festgestellt wurde, ist die Refraktionsseismik nicht sensitiv gegenüber den Änderungen, die eine Berücksichtigung der Kapillarkräfte bewirken. Dagegen ist die Geoelektrik sehr stark abhängig vom Sättigungsgrad des Gesteins und damit gegenüber der veränderten Fluidverteilung im Untergrund. Bei dem in diesem Beispiel gewählten einfachen Modell ist der durch die Kornverteilungsparameter beeinflussbare Anteil der Fluidverteilung knapp oberhalb der Grundwasseroberfläche lokalisiert. Daher ist es leicht nachvollziehbar, daß der Einfluß auf die Messungen mit der Tiefe der Grundwasseroberfläche abnimmt, wie dies in Abbildung 5.3 erkennbar ist.

Für den Beobachter an der Erdoberfläche ist die Beeinflussung der Messungen prinzipiell erst dann zu erkennen und auswertbar, wenn sie signifikant sind, d.h. wenn die Abweichungen größer als die anzunehmenden statistischen Fehler sind. Für die Geoelektrik sei diese Signifikanzschränke zu 4 Prozent angenommen, d.h. die Abweichung zwischen den Vorhersagen der beiden Modellierungsverfahren soll mindestens 4 % betragen, damit sie von statistischen Fehlern unterscheidbar ist. Für das obige Beispiel sind die Abweichungen für alle betrachteten Teufen der Grundwasseroberfläche signifikant. Im folgenden soll untersucht werden, wie sich die Signifikanz für unterschiedliche Kornverteilungen verhält. Dazu wurden die oben beschriebenen Modellierungen für Kornverteilungen durchgeführt, deren

mittlerer Kornradius  $r_{k,50}$  im Bereich von 10–1000  $\mu\text{m}$  und deren Kornverteilungsbreite  $s_k$  zwischen 0,01 und 0,5 variiert wurden. Die folgenden Abbildungen 5.4 und 5.5 zeigen die relative Abweichung für Grundwasseroberflächen in einer Teufe von 5, 10 und 15 Metern. Dabei sind die Graustufenskala in den jeweiligen Abbildungen einheitlich gewählt, damit diese vergleichbar sind. Ferner werden Abweichungen kleiner als 4% weiß dargestellt, so daß die Signifikanzgrenze leicht zu erkennen ist. Anhand dieser Abbildungen erkennt man, daß die Abweichungen desto größer werden, je kleiner der mittlere Kornradius bzw. je breiter die Kornverteilung des Bodengefüges ist. Dieses Verhalten ist qualitativ anhand der Ausführungen in Abschnitt 2.3 zu erklären. Dort wird in Abbildung 2.12 auf Seite 30 die Abhängigkeit der Sättigungskurven von der Kornverteilung gezeigt.

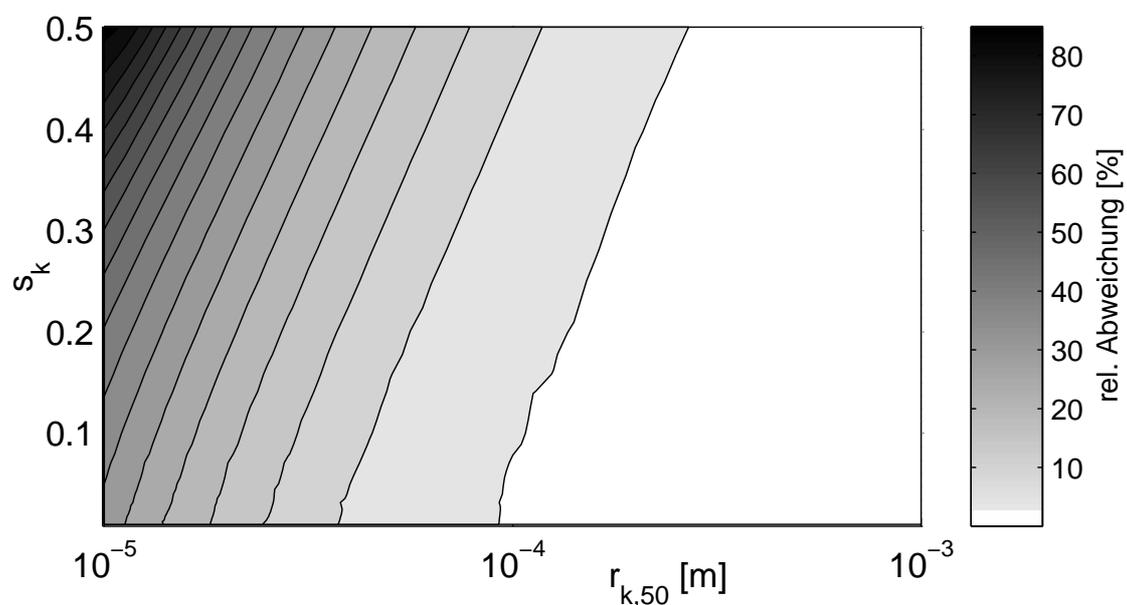


Abbildung 5.4: Relative Abweichung der geoelektrischen Modellierungen in Abhängigkeit von den Kornverteilungsparametern  $r_{k,50}$  und  $s_k$  für eine Grundwasseroberfläche in 5m Teufe.

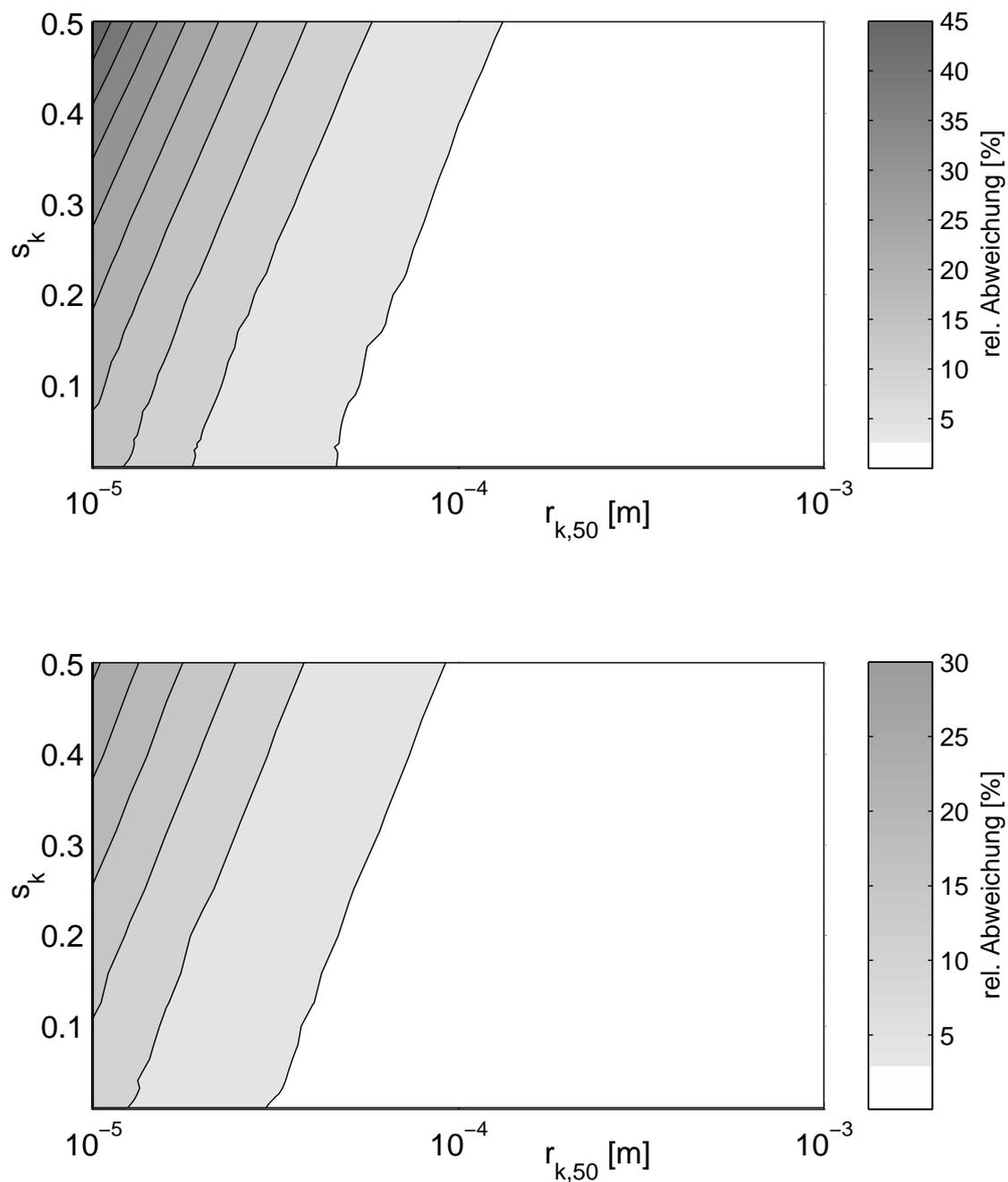


Abbildung 5.5: Relative Abweichung der geoelektrischen Modellierungen in Abhängigkeit von den Kornverteilungsparametern  $r_{k,50}$  und  $s_k$  für eine Grundwasseroberfläche in 10m (*oben*) bzw. 15m (*unten*) Teufe.

Die Abbildungen 5.4 und 5.5 bestätigen die zu erwartende Korrelation zwischen der kapillaren Steighöhe und den Abweichungen zwischen den Schlumberger-Sondierungskurven. Weiterhin wurde dieses Verhalten quantifiziert. Somit können notwendige Bedingungen formuliert werden, die an die Geologie des Untergrundes gestellt werden müssen, damit die Inversion geoelektrischer Messungen unter der Annahme von scharf lokalisierten Grenzflächen mit einem sprunghaften Wechsel des spezifischen Widerstands gelingt. Im folgenden sind vier hinreichende Bedingungen formuliert:

- Die Gesteinskörpern sind vollständig fluidgesättigt.
- Die Gesteinskörpern sind vollständig desaturiert.
- Der Untergrund besteht aus sehr grobkörnigem und gut sortiertem Material, wie z.B. grober Sand, Kies und Schotter.
- Die Grundwasseroberfläche befindet sich in sehr großer Tiefe, so daß die Effekte der Wasserverteilung geringer sind als die meßtechnisch zu erfassenden.

In Meßgebieten mit aridem Klima kann eine dieser hinreichenden Bedingungen erfüllt sein. Im allgemeinen ist es jedoch notwendig, kontinuierliche Widerstandverteilungen zu berücksichtigen, um geoelektrische Messungen mit anderen geophysikalischen Methoden in Einklang zu bringen.

### 5.3 Einzelinversion geoelektrischer Daten

Im vorangegangenen Abschnitt wurden „Forderungen“ an den Untergrund gestellt, die erfüllt sein müssen, damit die Verteilungen der elastischen und geoelektrischen Parameter im Untergrund durch eine gemeinsame Grenzfläche beschrieben werden können. Da geoelektrische Verfahren wegen ihrer schnellen und preisgünstigen Durchführbarkeit auch zur strukturellen Erkundung des flachen Untergrundes genutzt werden, soll in diesem Abschnitt untersucht werden, welche Auswirkungen die Verletzung dieser Forderungen auf die Lokalisierung der angenommenen Grenzfläche hat. Grundlage dieser Untersuchung ist wiederum ein Halbraum mit den Kornparametern  $\phi = 0,25$ ,  $s_k = 1,0$  und variablem  $r_{k,50}$ . Die Grundwasseroberfläche wird in 10m Tiefe angenommen. Anhand dieses Modells wird eine Sondierungskurve synthetisiert, die unter der Annahme von diskreten Grenzflächen invertiert wird. Um etwaige Streuungen des Ergebnisses durch das Konvergenzverhalten des Inversionsprozesses zu verhindern, wird das globale Minimum der Fehlerfunktion durch die in Abschnitt 4.1 beschriebene reguläre Suche bestimmt. Die Inversion wurde zunächst unter der Annahme nur einer Grenzfläche durchgeführt. Das Ergebnis zeigt Abbildung 5.6, woraus ersichtlich wird, daß bei sehr feinkörnigem Bodenmaterial die Lokalisation der angenommenen Grenzfläche deutlich von der Tiefe der Grundwasseroberfläche

abweicht. Da zusätzlich ein hoher Anpassungsfehler auftritt wurde die Inversion mit zwei Grenzflächen wiederholt. Der Anpassungsfehler beider Inversionsergebnisse ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Dort kann man erkennen, daß der resultierende Fehler durch die Inversion mit zwei Grenzflächen deutlich reduziert wurde. Betrachtet man das Ergebnis dieser Inversion in Abbildung 5.7, so kann man aber feststellen, daß die Struktur, sprich die Grundwasseroberfläche für feinkörniges Material, mit keiner der Grenzflächen des Inversionsergebnisses übereinstimmt. Dieses Ergebnis zeigt, daß die strukturelle Erkundung mittels geoelektrischer Verfahren eng an die im letzten Abschnitt formulierten Bedingungen geknüpft ist, da sie sonst zu systematisch abweichenden Ergebnissen führt.

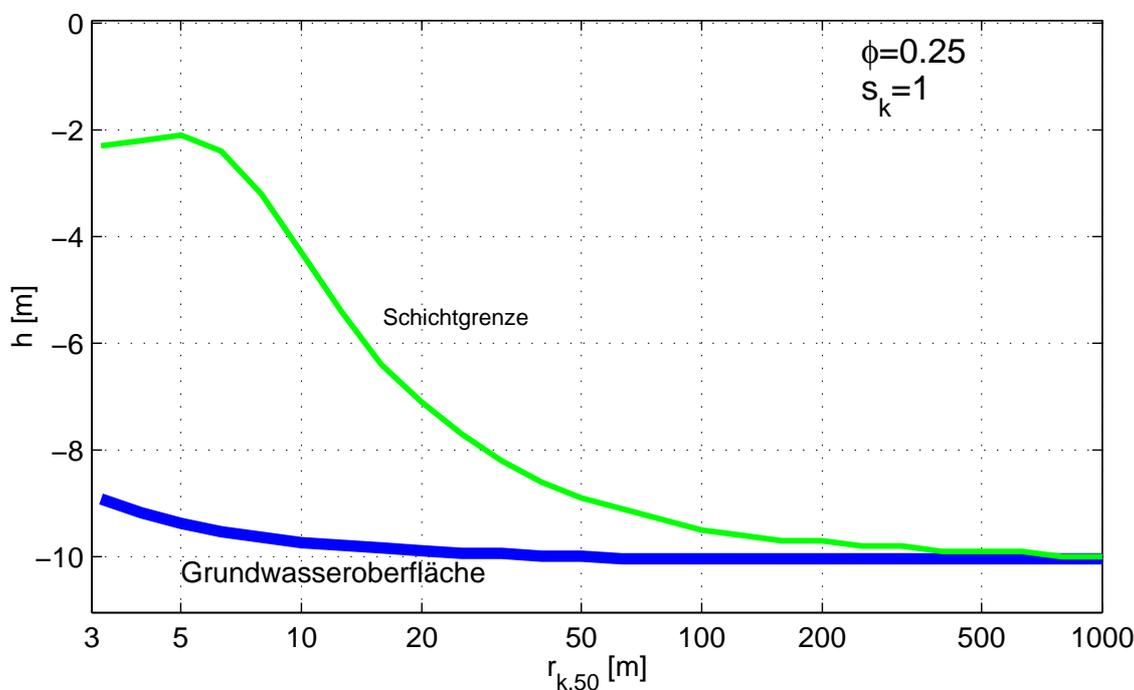


Abbildung 5.6: Lokalisierung der Schichtgrenze unter Verwendung des geoelektrischen Zwei-Schichten-Falles.

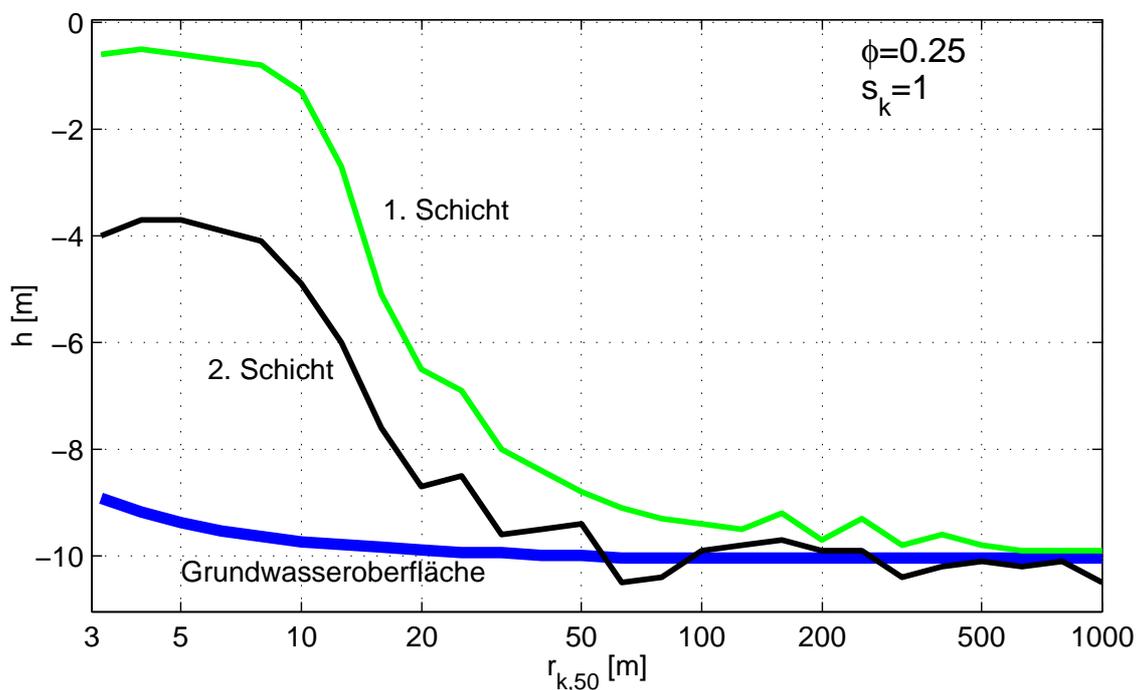


Abbildung 5.7: Lokalisierung der Schichtgrenze unter Verwendung des geoelektrischen Drei-Schichten-Falles.

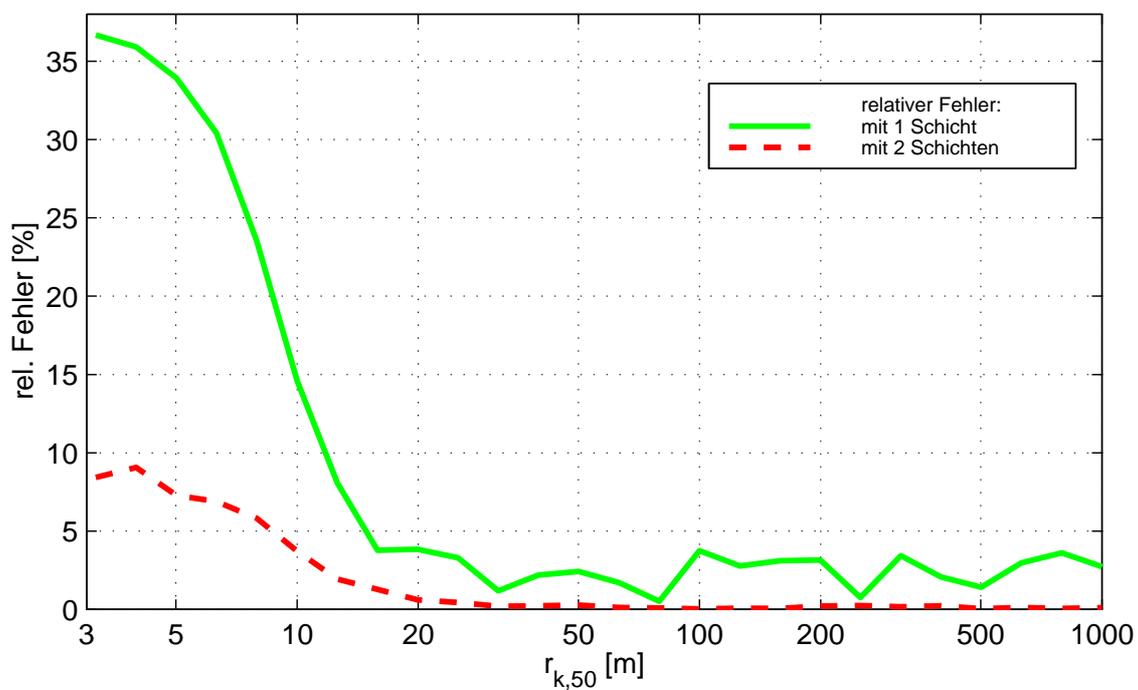


Abbildung 5.8: Anpassungsfehler der Inversionsergebnisse für den Zwei- und Drei-Schichten-Fall.

## 5.4 Inversion synthetischer Daten

Nachdem im Abschnitt 5.2 dargelegt wurde, unter welchen Voraussetzungen die Joint Inversion von seismischen und geoelektrischen Verfahren mit Hilfe des Grenzflächenkonzepts gelingt, soll im folgenden die Inversion eines Falles durchgeführt werden, bei dem die konventionelle Joint Inversion voraussichtlich versagt. Die Joint Inversion soll dabei sowohl mit dem konventionellen Grenzflächenansatz als auch unter der Verwendung des Bodenmodells erfolgen. Dazu wird das aus Abschnitt 5.2 bekannte und in Abbildung 5.1 dargestellte Modell benutzt. Zusätzlich wurden die synthetisch erzeugten Daten durch ein normalverteiltes Rauschen von 2 Prozent verändert.

Die Inversion wird ausgehend von demselben Startmodell sowohl mit als auch ohne Berücksichtigung der Kapillarkräfte durchgeführt. Um eine Inversion nach dem Grenzflächenkonzept zu simulieren, wird der mittlere Kornradius  $r_{k,50}$  auf einen unveränderlichen Wert von 10mm gesetzt. Dadurch werden die Kapillarkräfte bei Beibehaltung des Algorithmus vernachlässigbar gering, so daß das Verhalten der Inversion dem einer konventionellen Joint Inversion unter der Verwendung von Grenzflächen gleicht. Für die Inversion wurden die Verfahren der Refraktionsseismik, der Geoelektrik und Rayleigh–Wellen eingesetzt. Entgegen der in Abschnitt 4.9 vorgestellten Verfahrensweise wird hier als Fehlermaß die Gruppenlaufzeitkurve der Grundmode verwendet, die bis zu einer Frequenz von ca. 35 Hz durch keine höhere Mode gestört werden kann. Die Modellparameter des verwendeten Modells, des Startmodells und der durch die Inversion erzielten Lösung sind in der Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Daneben befinden sich in dieser Tabelle Angaben zur erzielten Anpassungsgüte, die durch den relativen Fehler zwischen den Daten und der Modellierung quantifiziert wird. Dabei werden die relativen Fehler durch  $\hat{\mathcal{L}}_s$  für die Refraktionsseismik,  $\hat{\mathcal{L}}_e$  für die Geoelektrik und  $\hat{\mathcal{L}}_r$  für die Rayleigh–Welle bezeichnet.

Abbildung 5.9 zeigt die im Rahmen des Inversionsprozesses ermittelten Modellierungen, welche die geringste Abweichung zwischen Modellierung und Daten produzieren. Die Ergebnisse der beiden Inversionsansätze sind jeweils gegenübergestellt und die zu invertierenden Daten durch Kreuze gekennzeichnet. In der Abbildung 5.9 *Mitte* sind der Deutlichkeit halber reduzierte Laufzeitkurven aufgetragen, wobei eine Reduktionsgeschwindigkeit von 1300 m/s verwendet wurde. Vergleicht man die Abbildungen, so fällt die relativ schlechte und systematisch verschobene Anpassung der Sondierungskurve und der Laufzeitkurve in Abbildung 5.9 *links, oben* bzw. 5.9 *links, Mitte* auf. Um diese systematischen Fehler zu verringern, kann das Inversionsverfahren nach dem Konzept der Grenzflächen als freien Parameter nur die Höhe  $h_w$  verändern. Eine Verschiebung der Sondierungskurve zu geringeren Auslagenlängen benötigt eine Verkleinerung von  $h_w$ , während eine Verschiebung der Überholentfernung zu größeren Entfernungen eine Vergrößerung von  $h_w$  verlangt. Dieses Dilemma kann mit dieser einfachen Modellvorstellung nicht aufgelöst werden. Während die Einzelinversionen sowohl der Laufzeitkurve als auch der Sondierungskurve zu einer Reduzierung des Anpassungsfehlers führen, werden diese Inversionen die Grenzfläche un-

Parameter	Einheit	Modell	Grenzflächenkonzept		Bodenmodell	
			Startmodell	Resultat	Startmodell	Resultat
$r_{k,50}$	$[\mu\text{m}]$	20	[10000]	[10000]	7,5	15
$s_k$		0,5	0,6	0,48	0,6	0,47
$\varrho_s$	$[\text{kg}/\text{m}^3]$	2650	2650	2650	2650	2649
$K_0$	$[\text{GPa}]$	5,0	6,0	5,1	6,0	5,2
$\mu_m$		0,18	0,20	0,21	0,20	0,21
$\phi$		0,25	0,20	0,24	0,20	0,24
$\rho$	$[\Omega \text{ m}]$	0,3	0,4	0,29	0,4	0,30
$h$	$[\text{m}]$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$h_w$	$[\text{m}]$	5,00	4,00	3,97	4,00	5,43
$\hat{\mathcal{L}}_e$	$[\%]$		122	14,5	52	5,2
$\hat{\mathcal{L}}_s$	$[\%]$		13	2,0	13	1,1
$\hat{\mathcal{L}}_r$	$[\%]$		12	1,1	12	0,8

Tabelle 5.1: Modellparameter des wahren Modells, der Startmodelle und der Inversionsergebnisse. In eckige Klammern gesetzte Werte sind nicht variabel.

terschiedlich tief lokalisieren. Die Joint Inversion hingegen führt zu einer schlechteren Anpassung der einzelnen Messungen und liefert als Resultat ein gemittelttes Modell, wobei diese Mittelung nicht näher spezifiziert werden kann.

Im Gegensatz dazu liefert die Inversion, die den Sättigungsgradienten mit Hilfe eines Bodenmodells beschreibt, ein Ergebnis, welches keine systematischen Abweichungen aufweist. Vergleicht man die Anpassung der Dispersionskurve in Abbildung 5.9 *unten* durch beide Inversionsverfahren, so lassen sich keine Unterschiede ausmachen. Dies ist dadurch begründet, daß die Rayleigh–Wellen in starkem Maße durch die Scherfestigkeit des Untergrundes bestimmt ist, und die elastischen Eigenschaften des Korngerüsts nicht durch den Sättigungsgrad des Porenraumes beeinflußt werden. In Abbildung 5.10 sind die Parameterverteilungen dargestellt, die den Modellierungen in Abbildung 5.9 zugrundeliegen. Durch gestrichelte Linien sind jeweils die Parameterverteilungen gekennzeichnet, aus denen der zu invertierende Datensatz berechnet wurde. In der Abbildung 5.10 *oben* sind die für das Grenzflächenkonzept charakteristischen Sprünge in der Parameterverteilung zu erkennen. Die durch das Bodenmodell gegebene wahre funktionale Abhängigkeit, vor allem für den spezifischen Widerstand des Untergrundes, kann nur grob approximiert werden.

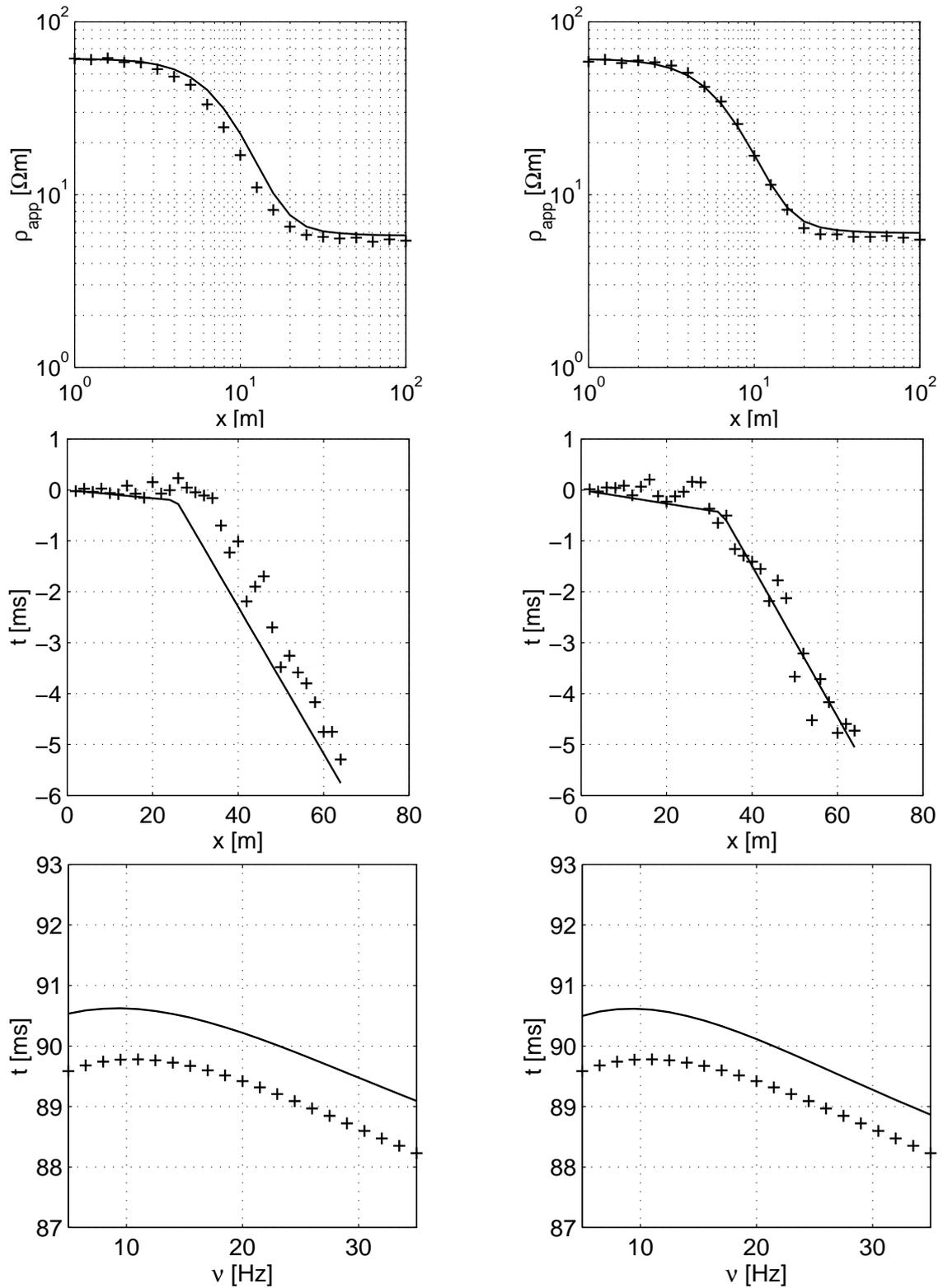


Abbildung 5.9: Die Sondierungskurven (*oben*), die reduzierten Laufzeitkurven (*Mitte*) und die Dispersionskurven (*unten*), berechnet ohne (*links*) und mit (*rechts*) Berücksichtigung des Sättigungsgradienten. Die Kreuze bezeichnen die Daten, die Linien das Inversionsergebnis.

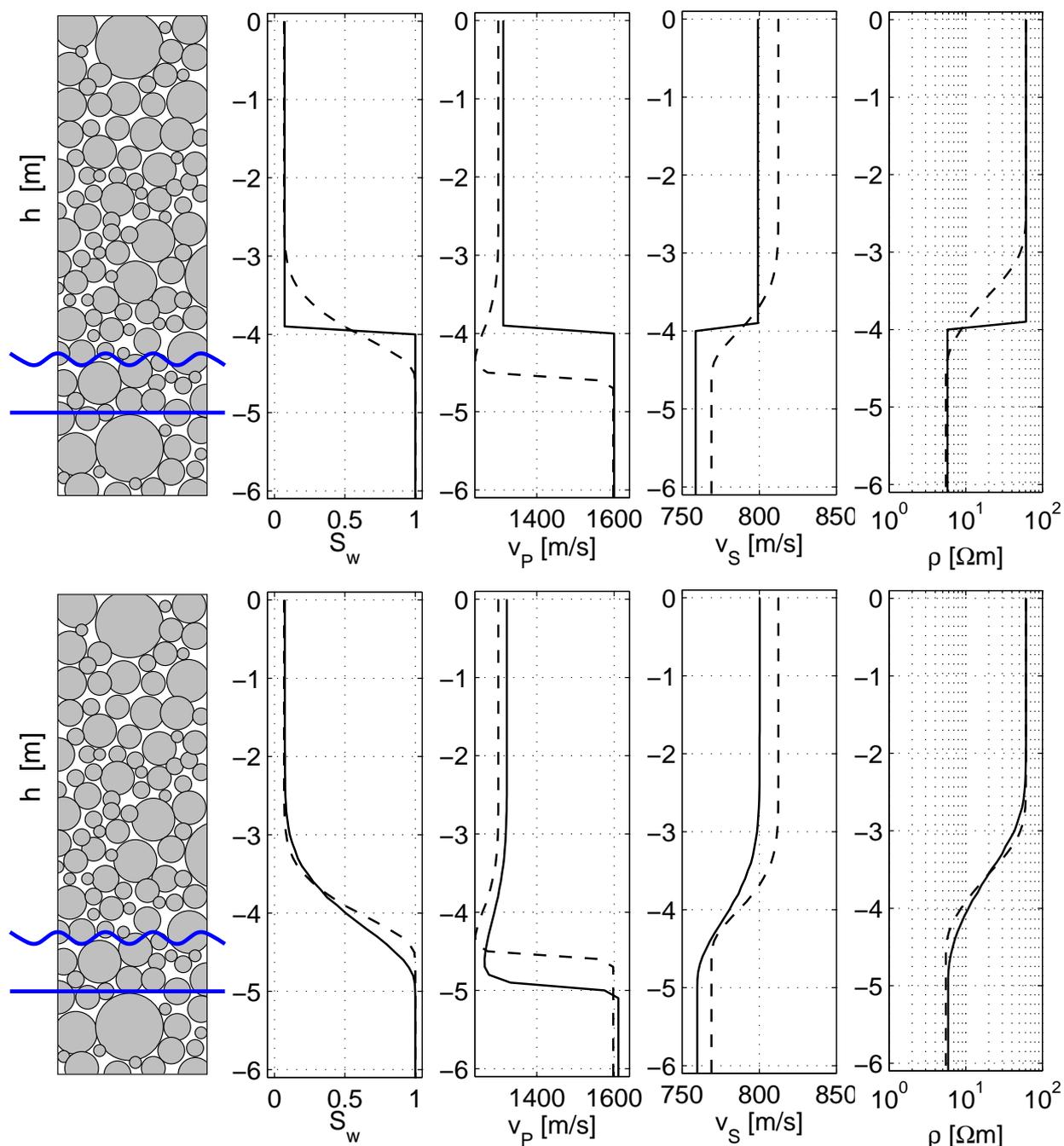


Abbildung 5.10: Verteilung der Parameter als Funktion der Tiefe. Die gestrichelte Linie zeigt das wahre Untergrundmodell, die durchgezogene Linie die Parameterverteilung des Inversionsergebnisses. *Links* : Durch die wellenförmige Linie dargestellt ist die scheinbare Grundwasseroberfläche. *Oben* : Das Ergebnis ohne Berücksichtigung des Sättigungsgradienten. *Unten* : Das Ergebnis mit Berücksichtigung des Sättigungsgradienten.

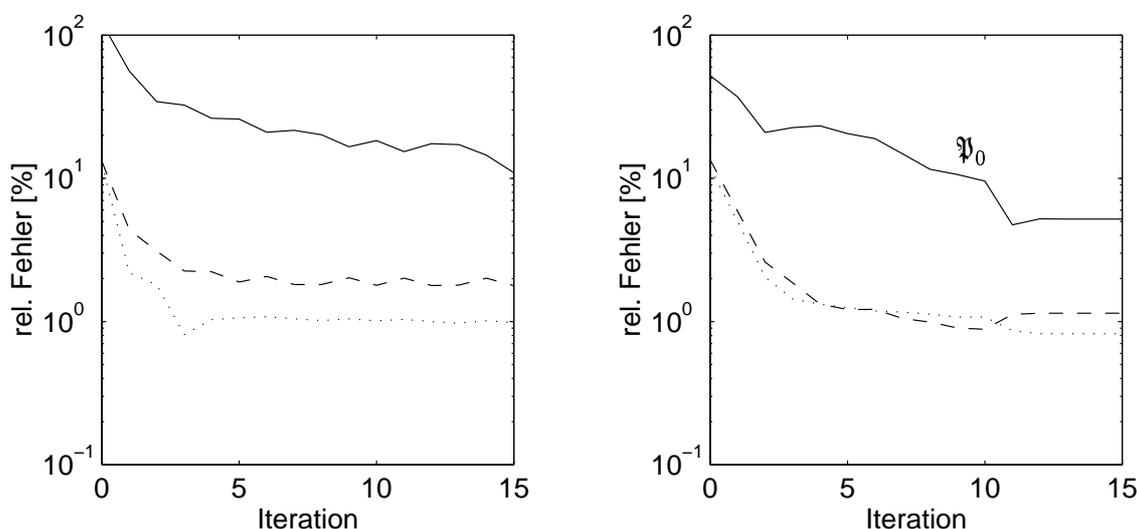


Abbildung 5.11: Entwicklung der relativen Fehler während der Iteration. *Links:* Inversion nach dem Grenzflächenkonzept, *rechts:* Inversion unter Berücksichtigung des Sättigungsgradienten. Dargestellt sind  $\hat{\mathcal{L}}_s$  (gestrichelt),  $\hat{\mathcal{L}}_e$  (durchgezogen) und  $\hat{\mathcal{L}}_r$  (gepunktet).

Der Fortschritt eines iterativen Inversionsalgorithmus wird durch die Verringerung der Fehlerfunktion  $\mathcal{L}$  durch die Modellvektorfolge  $\underline{\mathbf{m}}_k$  beschrieben. Die Werte der einzelnen Fehlerfunktionen im Verlauf der Iteration sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Wie schon in den Ausführungen in Kapitel 4 zu sehen war, ist die Konvergenzrate zu Beginn der Iteration besonders hoch. Schon nach vier bis fünf Iterationen ist für die Fehlerfunktion  $\hat{\mathcal{L}}_s$  der Refraktionsseismik keine merkliche Verbesserung mehr zu erkennen, während die Fehlerfunktion der Geoelektrik  $\hat{\mathcal{L}}_e$  eine stetige spürbare Verbesserung erfährt.

In Abbildung 5.11 *rechts* ist die 10. Iteration durch das Zeichen des Projektionsoperators  $\mathfrak{P}_0$  markiert. Wie in Abschnitt 4.8 beschrieben, wird ab dieser Iteration eine Einzelinversion der Geoelektrik durchgeführt, wobei die Projektion auf den Nullraum der Seismik verwendet wird, um das Ergebnis der seismischen Methoden nicht zu beeinflussen. Dadurch kann der Anpassungsfehler an die geoelektrische Sondierungskurve nochmals beträchtlich verringert werden, in diesem Fall ca. um den Faktor 2.

## 5.5 Inversion eines Felddatensatzes

Abschließend sollen die in dieser Arbeit entwickelten Verfahren an einem Feldfall demonstriert werden. Das Erkundungsgebiet liegt in der Nähe des ungarischen Dorfes Korlát im Bezirk Borsod. Die Struktur des zu erkundenden Untergrunds besteht im wesentlichen aus drei Komplexen. Das Grundgestein besteht aus massivem vulkanischen Gestein, genauer Andesit, der weiter im Norden des Meßgebietes ansteht. Darüber befinden sich ein leicht verwitterter, lockerer Andesit-Tuff und zu oberst tertiäre Sedimente, die ein im Süden des Meßgebietes fließender Bach abgelagert hat. Abbildung 5.12 zeigt die angenommene geometrische Struktur des Untergrundes nach Auswertungen mittels konventioneller Verfahren durch Gyulai & Ormos (1999) und Gyulai et al. (2000), sowie aus Bohrlochdaten in der näheren Umgebung. Neben einer 2D refraktionsseismischen Messung entlang der Profillinie „I“ wurden entlang der drei Querprofile „C1“, „C2“ und „C3“, also parallel zur angenommenen Streichrichtung, refraktionsseismische Messungen und Schlumberger-Sondierungen durchgeführt.

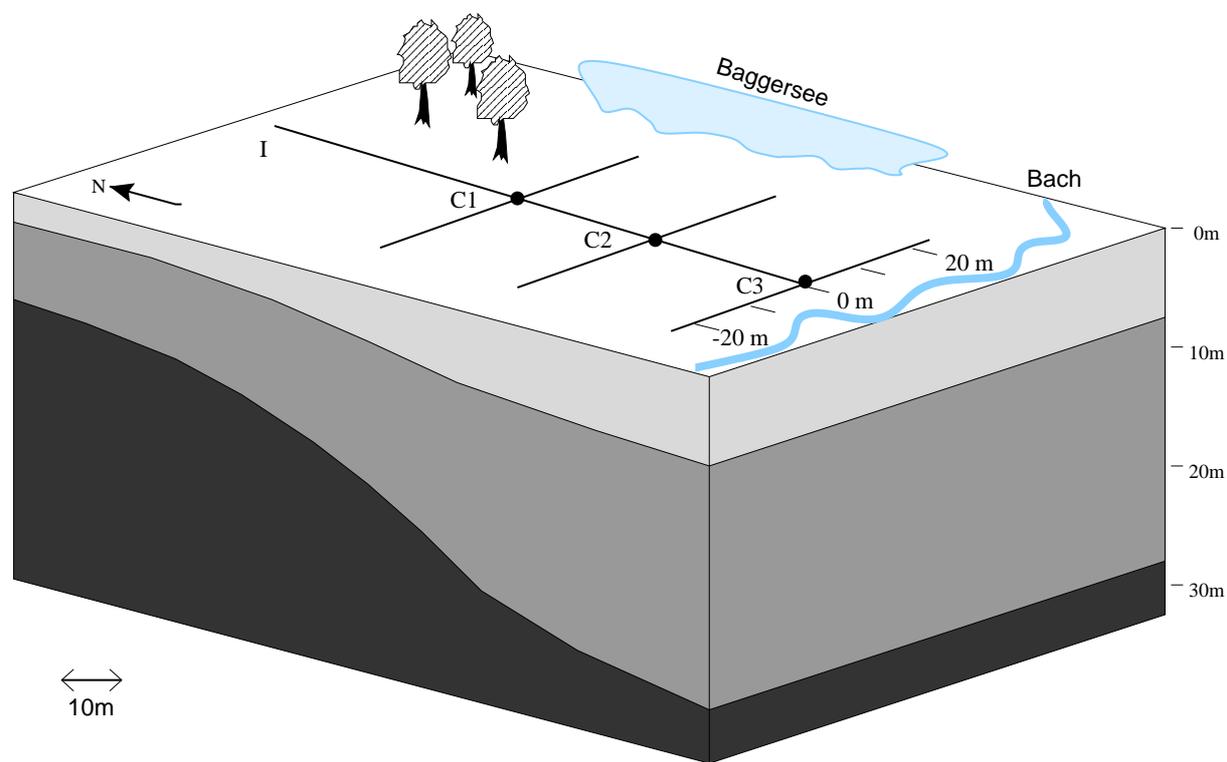


Abbildung 5.12: Schemazeichnung: Geologie des Meßgebietes. Die Schichtmächtigkeiten sind 2-fach überhöht gezeichnet. Die Seismik-Profile sind durch Linien, die Sondierungspunkte der Geoelektrik durch Punkte gekennzeichnet.

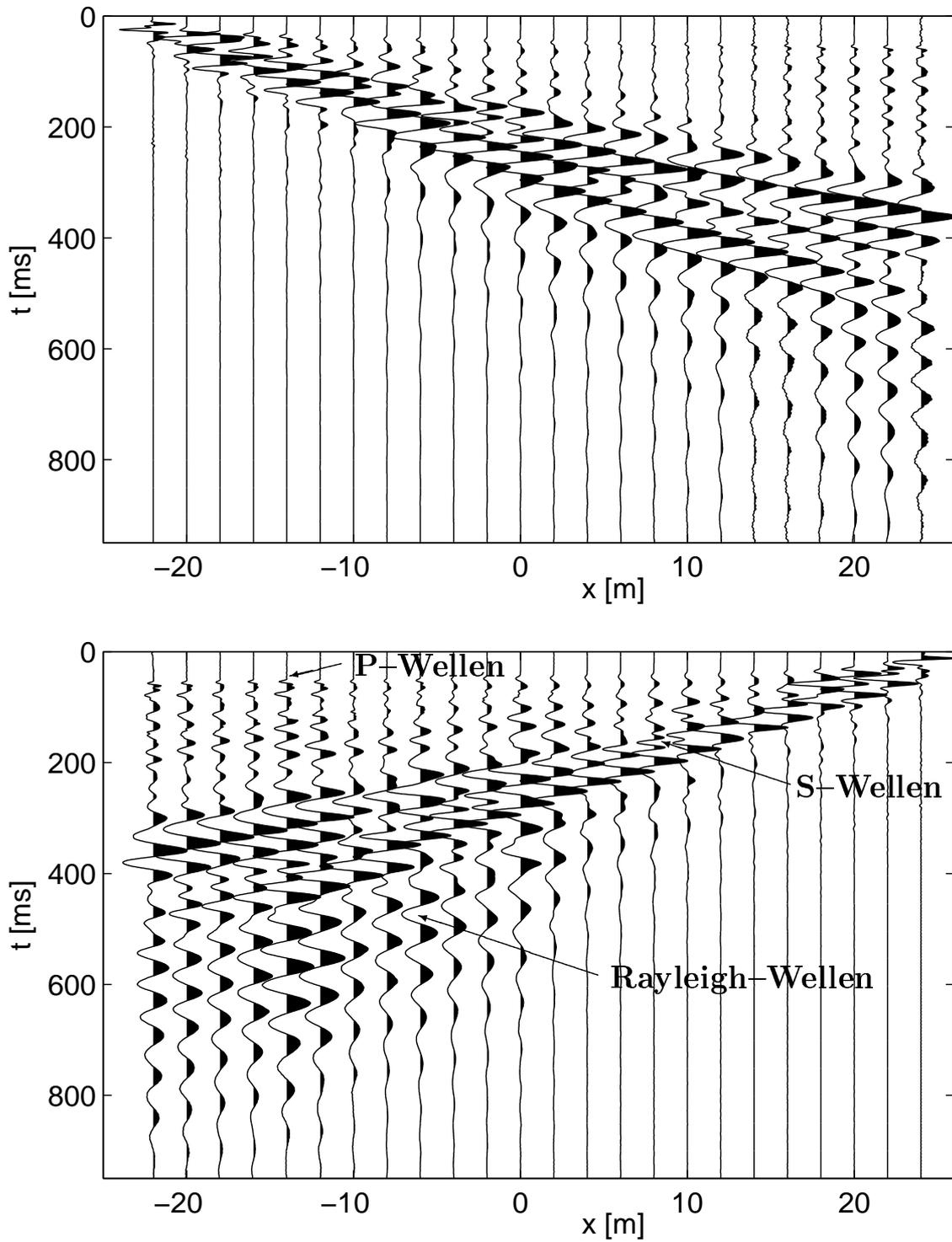


Abbildung 5.13: Die seismischen Sektionen entlang des Querprofils C3 für die Schußpunkte -23 m (*oben*) und 25 m (*unten*).

Für die Seismik wurden 24 Geophone im Abstand von 2 m ausgelegt. Die Registrierung der Seismogramme erfolgte durch die vom Eötvös Lorand Geophysical Institute hergestellte Aparatur ESS 03–24 mit einer Abtastfrequenz von 2 kHz für eine Dauer von 1 Sekunde. Als Quelle diente ein Hammerschlag. Die Schlumberger–Sondierungen wurden mit Hilfe eines ABEM Terrameters SAS–300C durchgeführt, wobei dem Untergrund ein Strom von 50 mA bei 1 Hz aufgeprägt wurde. Jeder Meßwert repräsentiert dabei den Mittelwert von 4 Messungen des Widerstandes an einem Ort. Bedingt durch die Bebauung war die Auslagenlänge auf 80 m beschränkt.

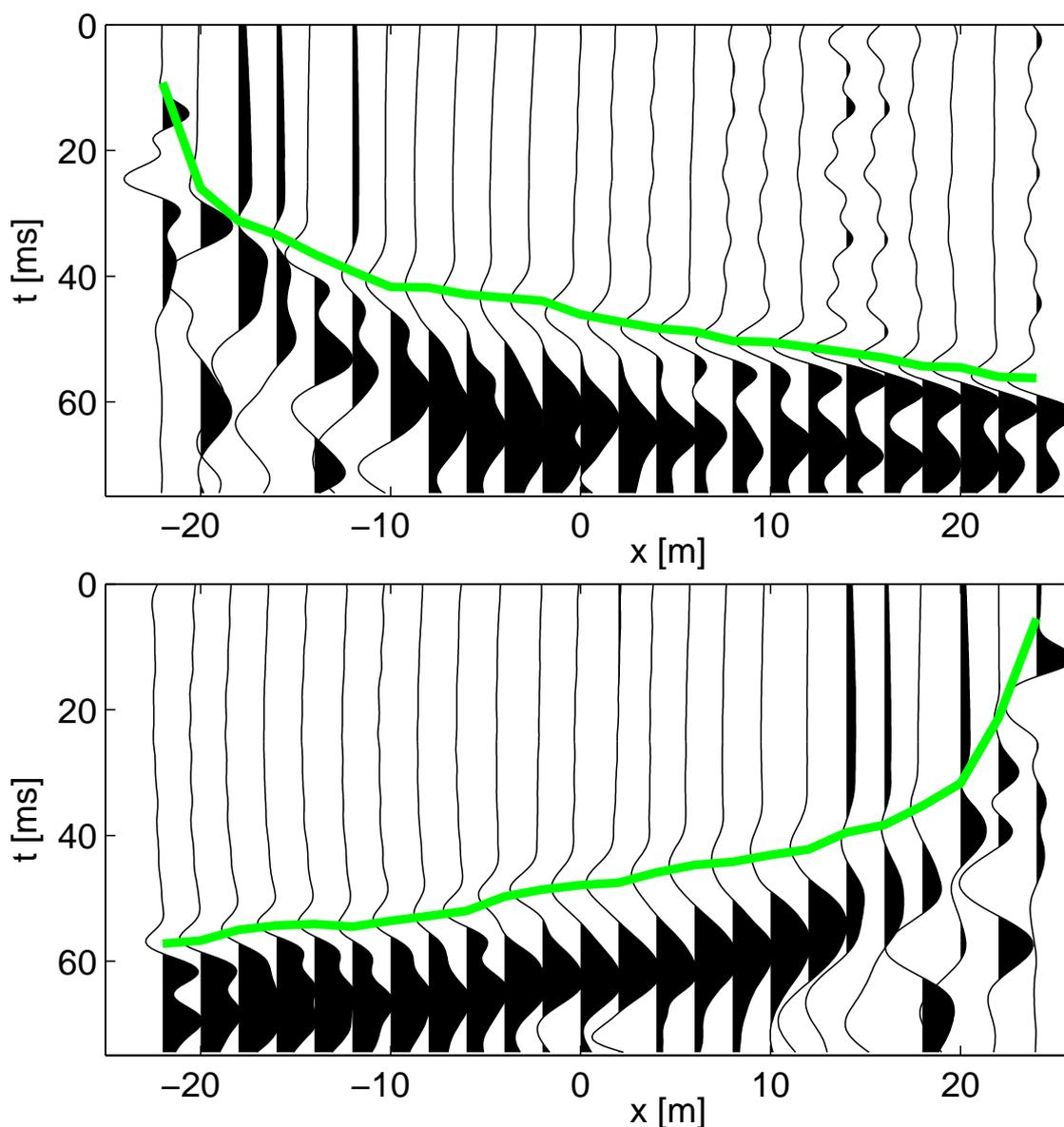


Abbildung 5.14: Die ersten 75 ms der seismischen Sektionen aus Abbildung 5.13 mit den Ersteinsätzen und deren Koda; darin eingezeichnet die Ersteinsatzzeiten für die Schußpunkte -23 m (*oben*) und 25 m (*unten*).

Zieht man die durch die relativ kurzen Auslagenlängen erreichbare geringe Erkundungstiefe in Betracht, so sind die Voraussetzungen für eine eindimensionale Betrachtung für das Querprofil „C3“ hinreichend erfüllt. Das Material der obersten Schicht, die fluvialen Sedimente, sowie der an einem benachbarten Baggersee erkennbare Grundwasserspiegel in ca. 3–4 Metern Tiefe, lassen die geologische Situation im Meßgebiet ideal erscheinen, da sie den in dieser Arbeit gemachten Annahmen entspricht. In der Abbildung 5.13 sind die seismischen Sektionen für die Schußpunkte an den Enden des Profils gezeigt. Abbildung 5.14 zeigt die ersten 75 ms der zwei Sektionen noch einmal im Detail zusammen mit den manuell angerissenen Ersteinsatzzeiten. Vergleicht man beide Abbildungen, so fallen die beträchtlichen Laufzeitunterschiede zwischen den P–Wellenphasen und den S– bzw. Oberflächenwellen bei einer vergleichsweise kurzen Geophonauslage von 48 m auf. Dies läßt zunächst auf ein hohes  $v_P/v_S$ –Verhältnis schließen. Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2.5 kann daraus weiterhin geschlossen werden, daß ein hoch poröser, unverfestigter und wassergesättigter Untergrund vorliegt. Dies sind Eigenschaften, die in Einklang mit den allgemeinen Modellvorstellungen von einem fluvialen Sediment stehen. Detailliertere Aussagen über die Scherwellengeschwindigkeiten können mit Hilfe der Rayleigh–Wellen gemacht werden. Zur Schätzung der Dispersionseigenschaften wurden jeweils die Seismogramme des am weitesten von der Quelle entfernten Geophons einer Sektion genutzt.

Parameter	Einheit	Schichtnummer					Fehler $\hat{\mathcal{L}}$ [%]
		1	1b	2	3	4	
Inversion der Laufzeitkurven mit 4 Schichten							
$v_P$	[m/s]	200		880	1925	2250	2,2
$h$	[m]	2,00		3,80	5,10	$\infty$	
Inversion der Sondierungskurve mit 5 Schichten							
$\rho$	[ $\Omega$ m]	28	10	24	6,3	21	2,7
$h$	[m]	1,00	1,40	6,20	7,20	$\infty$	
Inversionsergebnis der Sondierungskurve nach Gyulai & Ormos (1999)							
$\rho$	[ $\Omega$ m]	30,4		16,9	11,8	41,1	4,1
$h$	[m]	0,6		14,3	29,7	$\infty$	

Tabelle 5.2: Ergebnisse der Einzelinversionen unter Verwendung des Grenzflächenkonzeptes.

Die Laufzeitkurven und die Schlumberger–Sondierung wurden zunächst einzeln invertiert. Die Ergebnisse dieser Einzelinversionen und das der Literatur entnommene Inversionsergebnis der Geoelektrik sind in der Tabelle 5.2 zusammengefaßt. Dabei ist anzumerken, daß für beide Methoden eine unterschiedliche Schichtanzahl angenommen wurde. Während für die Inversion der Laufzeitkurven 4 Schichten ausreichend sind, wurde eine weitere Schicht, in Tabelle 5.2 mit 1b gekennzeichnet, für die Inversion der geoelektrischen Messung ein-

geführt, da der Verlauf der Sondierungskurve augenscheinlich einen 5 Schichten–Fall vermuten läßt. Gyulai & Ormos (1999) führten die Inversion der Sondierungskurve dagegen mit 4 Schichten durch. Dieses Ergebnis ist zum Vergleich ebenfalls in der Tabelle 5.2 aufgeführt. Betrachtet man die durch die Inversion ermittelten Schichtmächtigkeiten, so lassen sich zunächst keine gemeinsamen Schichtgrenzen identifizieren, obwohl die durch die Inversion erhaltenen Mächtigkeiten für beide Methoden korrelieren. Als besonders störend erweist sich die zusätzliche Schicht 1b, die zur Inversion der Sondierungskurve eingeführt wurde. Eine Reduzierung der Schichtenanzahl für die Geoelektrik auf ebenfalls 4 Schichten führt dagegen zu keinem mit der Refraktionsseismik zu vereinbarenden Ergebnis.

Anhand der Erkenntnisse, die aus den in diesem Kapitel durchgeführten Modellrechnungen gewonnen wurden, und der in den seismischen Sektionen erkennbar niedrigen Scherwellengeschwindigkeit kann man vermuten, daß die oberste Schicht des Untergrundes aus einem lockeren, porösen Material besteht. Eine Grundwasseroberfläche innerhalb dieser Schicht erscheint als eine einzige wohldefinierte Grenzfläche in der Refraktionsseismik. Der Sättigungsgradient oberhalb der Grundwasseroberfläche verhindert dagegen die konventionelle Joint Inversion der Seismik zusammen mit der Geoelektrik. Erst mit Hilfe des in dieser Arbeit entwickelten Bodenmodells wird eine Inversion beider Verfahren durch ein Modell ermöglicht. Dabei werden als geologisches Modell 3 Schichten über einem Halbraum angenommen. Da die Geoelektrik in diesem Fall eine höhere Eindringtiefe als die Seismik besitzt, zeichnet sich der Halbraum gegenüber der 3. Schicht durch einen höheren spez. elektrischen Widerstand aus, während die restlichen Parameter den entsprechenden Parametern der 3. Schicht gleichgesetzt werden. Die Modellparameter des Lösungsmodells sind in Tabelle 5.3 aufgelistet.

Parameter	Einheit	Schichtnummer			
		1	2	3	4
$r_{k,50}$	$[\mu\text{ m}]$	15,8 (0,99)	16 (0,13)	16 (0,13)	<i>16</i>
$s_k$		1,0 (0,46)	0,9 (0,09)	0,9 (0,09)	<i>0,9</i>
$\rho_s$	$[\text{kg}/\text{m}^3]$	2500 (0,80)	2500 (0,04)	2650 (0,03)	<i>2650</i>
$K_0$	$[\text{GPa}]$	0,85 (1,00)	8,0 (0,82)	35,0 (0,07)	<i>35,0</i>
$\mu_m$		0,18 (0,93)	0,24 (0,01)	0,24 (0,04)	<i>0,24</i>
$\phi$		0,385 (1,00)	0,28 (0,38)	0,30 (0,32)	<i>0,30</i>
$\rho$	$[\Omega\text{ m}]$	1,95 (0,39)	1,95 (0,41)	0,5 (0,92)	2
$h$	$[\text{m}]$	5,30 (1,00)	5,30 (0,46)	10,0 (0,17)	$\infty$
$h_w$	$[\text{m}]$	1,55 (0,97)			

Tabelle 5.3: Die Modellparameter der Inversionslösung und in Klammern die dazugehörigen Werte der Effective Independence Distribution (EID). Kursiv gesetzte Werte sind keine unabhängigen Variablen.

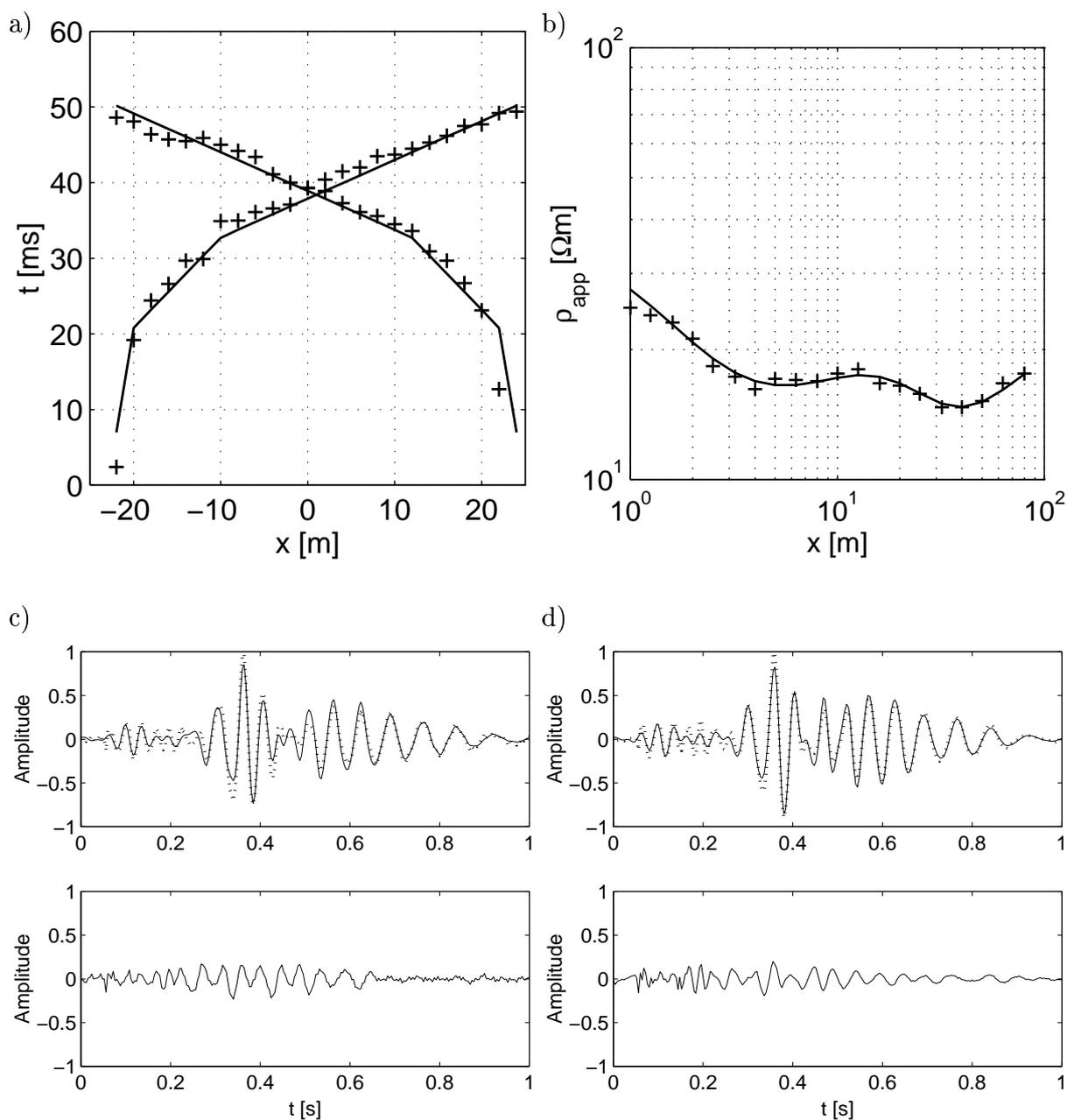


Abbildung 5.15: Anpassung der gemessenen Daten durch das Lösungsmodell aus Tabelle 5.3. a) Gemessene und angepaßte Laufzeitkurven. b) Gemessene und angepaßte Sondierungskurve. Die gemessenen Werte sind jeweils durch Kreuze +, die angepaßten Werte durch durchgezogene Linien dargestellt. c) und d) *oben* : Anpassung der Oberflächenwellen nach dem in dieser Arbeit entwickelten Verfahren für den Schußpunkt -23m bzw. 25m. Das gemessene Seismogramm ist gepunktet, das angepaßte durchgezogen gezeichnet. c) und d) *unten* : Das Differenzsignal zwischen angepaßtem und gemessenem Seismogramm.

Für die erhaltenen Parameter des Lösungsmodells können die Fehler, im Sinne von Fehlerbalken bzw. Standardabweichungen, nicht angegeben werden. Dies hat mehrere Ursachen. Erstens ist die Fehlerfunktion in der Umgebung der Lösung nicht bekannt, so daß eine linearisierte Form der Fehlerfunktion betrachtet werden muß, was dazu führt, daß der Gültigkeitsbereich der Linearisierung größer sein muß als die ermittelten Fehlerintervalle. Diese Voraussetzung ist wegen der Existenz eines Nullraumes nicht gegeben. Zweitens führt die Existenz eines Nullraumes dazu, daß die Kovarianzmatrix nicht berechnet werden kann, da die Inverse  $(F'^T F')^{-1}$  nicht existiert. Drittens können aufgrund der Verwendung eines Gradientenalgorithmus keine Aussagen über die Anzahl der lokalen Minima gemacht werden, noch kann gesichert werden, daß die gefundene Lösung das globale Minimum der Fehlerfunktion repräsentiert. Für Fehlerfunktionen, die mehrere gleichwertige Lösungen besitzen, sind Standardabweichungen, sofern sie denn berechenbar sind, ohne Bedeutung (Tarantola (1987)).

Um dennoch die Zuverlässigkeit der Bestimmung einzelner Modellparameter zu quantifizieren, wird die in Abschnitt 4.7.3 eingeführte Effective Independence Distribution (EID) verwendet. In Tabelle 5.3 sind die den Parametern zugehörigen Werte der EID in Klammern angegeben. Ein EID-Wert von 1 bedeutet die vollständige Auflösung des betreffenden Parameters durch mindestens ein geophysikalisches Verfahren. Kleine Werte der EID bedeuten eine geringe Sensitivität der Fehlerfunktion gegenüber dem zugehörigen Parameter bzw. eine durch das Bodenmodell beschriebene Korrelation mit anderen Parametern. Ist ein Parameter völlig unbestimmt, so ist der zugehörige EID-Wert gleich 0. Da die Bildung der Ableitung  $F'$  am Punkt der Lösung numerisch gebildet wird, ist bei der Interpretation der EID-Werte die in Gleichung (4.3) verwendete Variation des Modellparameters zu berücksichtigen, welche in diesem Fall 2 % des Modellparameters beträgt. Die Aussagen über Auflösbarkeit bzw. Nichtauflösbarkeit beziehen sich daher immer auf diese zweiprozentige Variation des Parameters.

In Abbildung 5.15 sind die gemessenen Daten im Vergleich zu den synthetisierten Daten, die mit Hilfe der in Tabelle 5.3 zusammengestellten Parameter des Inversionsergebnisses berechnet wurden, dargestellt. Die relativen Fehler  $\hat{\mathcal{L}}$  der angepaßten zu den gemessenen Daten der jeweiligen Methoden sind in Tabelle 5.4 aufgeführt.

Es ist erkennbar, daß die relativen Fehler für alle eingesetzten Verfahren gleichermaßen niedrig sind, so daß das gefundene Modell eine Lösung darstellt, die für alle eingesetzten geophysikalischen Methoden konsistent ist.

Die durch die Parameter des Bodenmodells bestimmte Verteilung der physikalischen Parameter in Abhängigkeit von der Tiefe ist in Abbildung 5.16 dargestellt. Dabei wird nur der Tiefenbereich abgebildet, der durch alle drei angewendeten Methoden aufgelöst werden kann. Die zur korrekten Anpassung der geoelektrischen Sondierung benötigte 4. Schicht in Tabelle 5.3 ist dagegen nicht gezeigt. Dort erkennt man, daß der Sättigungsgradient innerhalb der obersten 1,5 m des Untergrundes eine kontinuierliche Beschreibung

Methode	Abbildung	$\hat{\mathcal{L}}$ [%]
Refraktionsseismik	5.15a	3,8
Geoelektrik	5.15b	3,2
Oberflächenwellen (Schußpunkt: -23m)	5.15c	10,6
(Schußpunkt: 25m)	5.15d	6,8

Tabelle 5.4: Relative Fehler der Anpassungen der einzelnen Verfahren. Die zugehörigen gemessenen und angepaßten Daten sind in der angegebenen Abbildung dargestellt.

des spezifischen elektrischen Widerstandes nötig macht. Dagegen ließen sich alle tieferen Strukturelemente auch auf konventionelle Weise durch die Annahme homogener Schichten beschreiben, da der Untergrund dort wassergesättigt ist. Die geologische Interpretation des Inversionsergebnisses findet sich in Abbildung 5.16*rechts*. Oberhalb des Andesit-Tuffes, der weiter im Norden des Meßgebietes ansteht, befinden sich zwei Schichten, wovon die obere als ein unverfestigtes und die untere als ein konsolidiertes Sediment interpretiert wird. Die scheinbare Grundwasseroberfläche wurde in einer Tiefe von ca. 1,3 m lokalisiert.

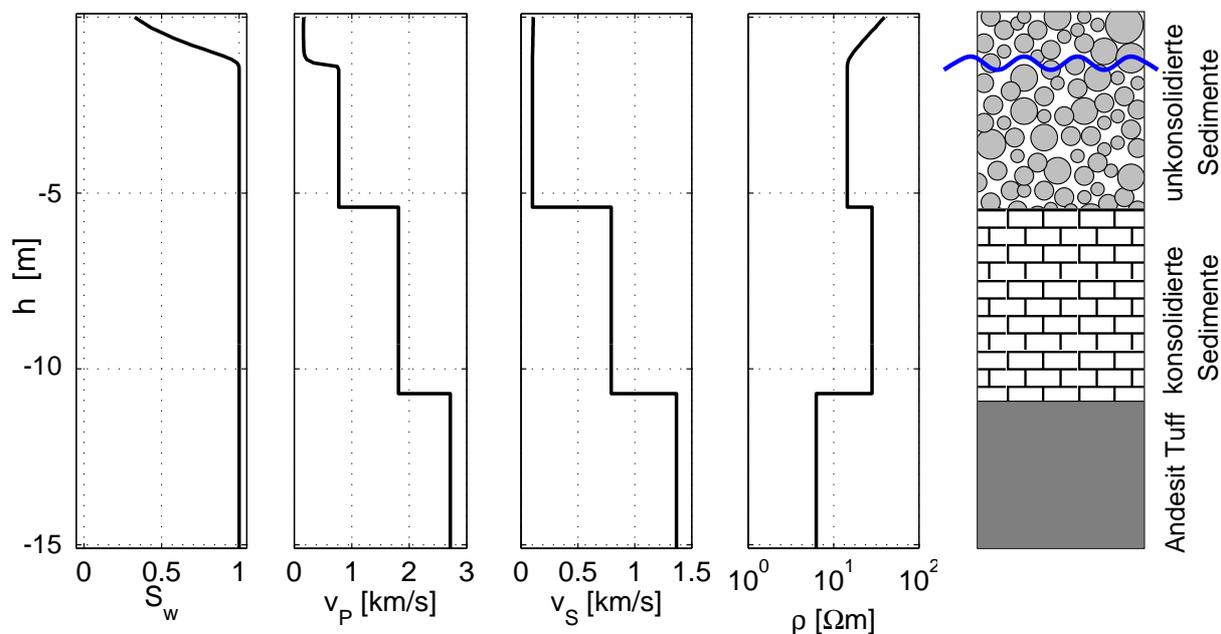


Abbildung 5.16: Verteilung der einzelnen physikalischen Parameter als Funktion der Tiefe. *Rechts* : Die geologische Interpretation der Messungen.

Es ist zu betonen, daß diese Interpretation erst durch die Verwendung des Bodenmodells ermöglicht wurde. Der Vergleich der Einzelinterpretationen der geophysikalischen Verfahren aus Tabelle 5.2 mit dem Ergebnis in Abbildung 5.16 führt zu einem tendenziell ähnlichen, allerdings nicht konsistenten, Ergebnis. Wie in Abschnitt 5.2 und 5.3 gezeigt wurde, führt ein Sättigungsgradient in geringer Tiefe zu erheblichen Abweichungen in der Inversion geoelektrischer Sondierungskurven bei Verwendung des Grenzflächenkonzeptes. Diese Auswirkungen können an diesem Feldfall beobachtet werden. Erst die Verwendung der in dieser Arbeit neu entwickelten Verfahren führt zu einem für alle geophysikalischen Methoden konsistenten Ergebnis.



# Kapitel 6

## Resumé

### 6.1 Zusammenfassung

Die Erkundung der Geometrie und der physikalischen Parameter des flachen Untergrundes hat große Bedeutung, sowohl für ingenieurgeophysikalische Aufgabenstellungen, wie z.B. die Baugrunduntersuchung oder das Grundwassermonitoring, als auch zur Berechnung statischer Korrekturen im Rahmen von reflexionsseismischen Prospektionen von Kohlenwasserstoff-Lagerstätten in größeren Tiefen. Dabei ist es üblich, mehrere geophysikalische Methoden zu verwenden, um möglichst umfassende Informationen zu gewinnen. Um die gewonnenen Daten zu invertieren, wählt man in der Regel das Konzept der Grenzflächen, um die geometrische Parameterverteilung im Untergrund zu beschreiben. Bei diesem Konzept wird die Annahme gemacht, daß die physikalischen Parameter sich an sehr genau lokalisierten Grenzflächen sprunghaft ändern, während sie zwischen zwei Grenzflächen konstant bleiben. Wählt man diesen Ansatz, dann führen die Inversionen der unterschiedlichen geophysikalischen Methoden oft zu untereinander nicht konsistenten Ergebnissen. Das heißt, daß sowohl die Tiefen und Formen der Grenzflächen als auch die Grenzflächenanzahl verschieden sein können, so daß eine einheitliche Interpretation bzw. eine gemeinsame Inversion durch einen Algorithmus nicht möglich ist. Der einfache Ansatz zur Joint Inversion, daß die Grenzflächen der unterschiedlichen geophysikalischen Methoden identisch sind, führt daher nur in wenigen Fällen zu befriedigenden Ergebnissen. Dies gilt in besonderem Maße für die gemeinsame Inversion von seismischen und geoelektrischen Messungen, da die seismischen Geschwindigkeiten und elektrischen Widerstände voneinander völlig unabhängige Größen darstellen. Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Lösung eben dieser Grenzflächenproblematik bei der Joint Inversion.

Da allen Ansätzen, diese Grenzflächenproblematik im Rahmen neuer Inversionsalgorithmen zu lösen, die physikalische Motivation fehlt, wählte ich in dieser Arbeit einen neuen Ansatz, welcher die Probleme schon auf der Ebene der Modellierung zu beheben vermag.

Um diesem Anspruch gerecht zu werden, habe ich ein Bodenmodell entwickelt, das sowohl das elastische als auch das elektrische Verhalten eines Gefüges beschreibt. Die Grundlage dieses Modells ist eine detaillierte Modellvorstellung der einzelnen Bestandteile und der Entstehung eines Sedimentes. Für ein poröses, körniges Sediment wurden die Gefügeeigenschaften mathematisch beschrieben und daraus die makroskopischen physikalischen Parameter abgeleitet. Vor allem die Porosität des Gefüges spielt bei allen Betrachtungen eine wichtige Rolle. Daher wurde in dieser Arbeit eine neue, nichtlineare Beziehung zwischen den seismischen Geschwindigkeiten und der Porosität des Mediums hergeleitet, die bisher als linear angenommen worden ist. Die Abhängigkeiten der elastischen und elektrischen Parameter von den Gefügeeigenschaften und der Porenfüllung wurden ausführlich untersucht. Dabei stellten sich die Eigenschaften des Porenraumes, vor allem die Porosität und die Fluidsättigung der Poren, als das Bindeglied zwischen Seismik und Geoelektrik heraus. Die dargestellten theoretischen Beziehungen zwischen den Gefügeparametern und den physikalischen Größen wurden durch experimentelle Daten untermauert.

Durch die Kenntnis über das unterschiedliche Verhalten der physikalischen Parameter, welche der Seismik und Geoelektrik zugrundeliegen, bezüglich der Gefügeparameter, besteht die Möglichkeit, durch entsprechende Modellierungsverfahren anhand eines geologischen Modelles synthetische Daten für die beiden geophysikalischen Methoden zu erzeugen. In dieser Arbeit wurde zunächst der Fall söhlig gelagerter Schichten behandelt, für den die Informationen über die Scherwellengeschwindigkeiten des Untergrundes anhand von Rayleigh-Wellen gewonnen werden können. Während zur Modellierung der Refraktionsseismik und der Geoelektrik Standardalgorithmen eingesetzt werden konnten, mußte zur Berechnung der Dispersionskurven der Rayleigh-Wellen ein zuverlässigerer Algorithmus entwickelt werden.

Nach der Lösung des Modellierungsproblems wurde die Joint Inversion in geeigneter Weise formuliert. Dazu wurden die theoretischen Grundlagen der Inversion ausführlich beschrieben, vor allem im Hinblick auf die dort gestellten Bedingungen an das zu invertierende Problem und die Konvergenzrate. Im Anschluß daran wurden die Möglichkeiten der Verwendung der Singular Value Decomposition (SVD) und der durch die SVD bestimmten Unterräume und Projektionsoperatoren für die Inversion dargestellt. Der beschriebene Joint Inversionsalgorithmus verwendet, soweit möglich, das am schnellsten konvergierende Verfahren. Dazu werden die in den Grundlagen erörterten Bedingungen überprüft und aus drei implementierten Verfahren das günstigste Verfahren, das den Bedingungen genügt, ausgewählt. Dieser Ansatz zur Joint Inversion, der auf einer Kombination von Einzelinversionen beruht, wurde von mir verfolgt, um eine gute Anpassung der Daten aller eingesetzten Methoden zu erreichen. Die einzelnen Methoden werden innerhalb des Joint Inversion Algorithmus mit Hilfe von Projektionsoperatoren zusammengeführt.

Neben der Beschreibung des generellen Joint Inversion Algorithmus findet sich in dieser Arbeit ein neuer Ansatz zur Inversion von Oberflächenwellen, der innerhalb des generellen Inversionsalgorithmus verwendet werden kann. Dabei handelt es sich um eine Methode zur

Einbeziehung höherer Moden von Rayleigh-Wellen ohne vorherige Modentrennung und ohne interaktive Zuordnung von Signalanteilen zu bestimmten Moden. Die Vorteile dieser Methode wurden ausführlich erläutert und die Funktionalität an einem synthetischen Datensatz gezeigt.

Mit den größtenteils neu entwickelten Methoden wurden zunächst Modellrechnungen durchgeführt, um das Verhalten des Bodenmodells gegenüber dem konventionellen Grenzflächenkonzept zu untersuchen. Dadurch konnten die Bedingungen formuliert werden, unter denen die konventionelle Betrachtungsweise, verglichen mit dem formulierten Bodenmodell, eine äquivalente Beschreibung liefert. Ferner konnten die systematischen Abweichungen einer Inversion unter Verwendung des Grenzflächenkonzeptes bei Vorliegen eines durch eine Grundwasseroberfläche verursachten Sättigungsgradienten verdeutlicht werden. Die Durchführbarkeit der Inversion mit Hilfe des vorgestellten Bodenmodells wurde an einem synthetischen Beispiel ausführlich demonstriert. Daraufhin wurde ein bisher nicht durch eine Joint Inversion interpretierbarer Felddatensatz nach der in dieser Arbeit vorgestellten Methodik erfolgreich bearbeitet.

## 6.2 Schlußfolgerungen und Ausblick

Insgesamt zeigt die Fülle der in dieser Abhandlung behandelten Bereiche der Geologie, Gesteinsphysik, Seismik, Geoelektrik, Hydrologie und Mathematik, wie bedeutend eine interdisziplinäre Sichtweise einzelner Probleme ist. Erst die Zusammenführung zahlreicher Erkenntnisse dieser verschiedenen Forschungsgebiete, sowie deren Anpassung und Verbesserung, haben schließlich zum eigentlichen Ziel dieser Arbeit, der Lösung der Grenzflächenproblematik bei der Joint Inversion, geführt. Dennoch bleibt auch für die Zukunft noch erheblicher Forschungsbedarf bestehen, da der in dieser Arbeit aufgezeigte Lösungsweg noch in vielfältiger Weise erweiterbar ist. So existieren folgende Ansatzpunkte für weitere Arbeiten:

1. Die Erweiterung der Inversion auf zweidimensionale Problemstellungen. Die dazu benötigten Modellierungsalgorithmen sind vorhanden, benötigen aber eine um 2 Größenordnungen höhere Rechenzeit pro Modellierung bei gleichzeitigem Anstieg der freien Parameter. Während die Rechenzeit durch extensiven Gebrauch massiv parallelierter Algorithmen auf Rechnercluster mit einer großen Anzahl Prozessoren schon heute auf ein realisierbares Maß gesenkt werden kann, müssen die im Feld durchgeführten Messungen auf diese Problemstellung hin angepaßt werden.
2. Das Wissen bezüglich der zweidimensionalen Wasserverteilung im Untergrund ist in der Regel nicht vorhanden. Um den Einfluß des Porenfluids von den Eigenschaften der Kornmatrix zu separieren, wurden in dieser Arbeit Oberflächenwellen genutzt. Im 2D-Fall mit lateral stark variierenden Schichten ist dieser Weg nicht mehr

praktikabel. Daher ist es erforderlich, durch die Verwendung von 3-Komponenten-Geophonen eine Möglichkeit zu schaffen, Informationen aus den Scherwellen zu gewinnen. Dies verlangt sowohl eine geeignete Instrumentierung als auch ein zuverlässiges Verfahren der Raumwellentrennung.

3. Das Bodenmodell wurde dahingehend entwickelt, daß alle nötigen Parameter im Hinblick auf die Seismik und die Gleichstromgeoelektrik berechnet werden können. Durch eine Erweiterung um vorhandene oder noch zu entwickelnde Modellvorstellungen kann dieses Modell, z.B. durch eine komplexe elektrische Leitfähigkeit, erweitert werden, um geoelektrische Verfahren wie die induzierte Polarisation zu nutzen.

Trotz dieser Fülle noch zu bearbeitender Punkte zeigt diese Arbeit doch eine klare Perspektive für die Joint Inversion, wie sie jenseits der heute bestehenden Einschränkungen durch die Grenzflächenproblematik durchgeführt werden könnte.

# Literaturverzeichnis

- Archie, G.E., (1942). The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. *Trans. Am. Inst. Min. Metall. & Petrol. Eng.*, **146**, 54–67
- Armijo, L., (1966). Minimization of functions having Lipschitz–continuous first partial derivatives. *Pacific Journal of Mathematics*, **16**, 1–3
- Ben–Israel, A. & Greville, T.N.E., (1980). Generalized Inverses: Theory and Applications. *Robert E. Krieger Publishing Co., New York*
- Biot, M.A., (1956a). Theory of elastic waves in a fluid–saturated porous solid. I. Low frequency range. *Journal of the Acoustic Society of America*, **28**, 168–178
- Biot, M.A., (1956b). Theory of elastic waves in a fluid–saturated porous solid. II. High frequency range. *Journal of the Acoustic Society of America*, **28**, 179–191
- Breitzke, M., Dresen, L., Csókás, J., Gyulai, Á. & Ormos, T., (1987). Parameter estimation and fault detection by three–component seismic and geoelectrical surveys in a coal mine. *Geophysical Prospecting*, **35**, 832–863
- Brown, K.M. & Dennis, J.E., (1972). Derivative–free analogues of the Levenberg–Marquardt and Gauss Algorithms for nonlinear squares Approximations. *Numerische Mathematik*, **18**, 289–297
- Busch, K.–F., & Luckner, L., (1973). Geohydraulik. *VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, Leipzig*
- Buttkus, B., (1991). Spektralanalyse und Filtertheorie in der angewandten Geophysik. *Springer, Berlin*
- Carman, P.C., (1937). Fluid flow through a granular bed. *Transactions of the Institute of chemical Engineers (London)*, **15**, 150–156
- Chui, C.K., (1992). An introduction to wavelets. *Academic Press, San Diego*
- Darcy, H., (1856). Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. *Victor Dalmont, Paris*

- Delprat, N., Escudié, B., Guillemain, P., Kronland-Martinet, R., Tchamitchian, P. & Torrèsani, B., (1992). Asymptotic wavelet and Gabor analysis: Extraction of instantaneous frequencies. *IEEE Transactions on Information Theory*, **38,2**, 644–664
- Dennis, J.E. & Schnabel, R.B., (1983). Numerical Methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NY*
- Digby, P.J., (1981). The effective elastic moduli of porous granular rocks. *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 803–808
- Dobróka, M., Gyulai, Á., Ormos, T., Csókás, L. & Dresen, L., (1991). Joint inversion of seismic and geoelectric data recorded in an underground coal mine. *Geophysical Prospecting*, **39**, 643–665
- Domenico, S.N., (1977). Elastic properties of unconsolidated porous sand reservoirs. *Geophysics*, **42,7**, 1339–1368
- Doyen, P.M., (1988). Permeability, conductivity, and pore geometry of sandstone. *Journal of Geophysical Research*, **93,B7**, 7729–7740
- Dziewonski, A., Bloch, S. & Landisman, M., (1969). A technique for the analysis of transient seismic signals. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **59**, 427–444
- Farris, R.J., (1968). Prediction of the viscosity of multimodal suspensions from unimodal viscosity data. *Transactions of the Society of Rheology*, **12**, 281–301
- Fripiat, J., Cases, J., Francois, M. & Letellier, M., (1982). Thermodynamic and microdynamic behavior of water in clay suspensions and gels. *Journal of Colloid Interface Science*, **89**, 378–400
- Gassmann, F., (1951a). Über die Elastizität poröser Medien. *Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, **96,1**, 1–23
- Gerthsen, C., Kneser, H.O. & Vogel, H., (1989). Physik: Ein Lehrbuch zum Gebrauch neben Vorlesungen. *16. Auflage. Springer, Berlin*
- Goldstein, A.A., (1966). Minimizing functionals on normed linear spaces. *SIAM Journal of Control*, **4**, 81–89
- Gottardi, G. & Venutelli, M., (1992). Moving finite element model for one-dimensional infiltration in unsaturated soil. *Water Resources Research*, **28,12**, 3259–3267
- Gregory, A.R., (1976). Fluid saturation effects on dynamic elastic properties of sedimentary rocks. *Geophysics*, **41**, 895–921

- Grossmann, A., Kronland–Marinet, R. & Morlet, J., (1989). Reading and understanding continuous wavelet transforms. In: Combes, J.M., Grossmann, A. & Tchamitchian, P. (eds.). *Wavelets: Time–Frequency Methods and Phase Space*. Springer–Verlag, Berlin, 2–20
- Gyulai, Á. & Ormos, T., (1999). A new procedure for the interpretation of VES data: 1.5–D simultaneous inversion method. *Journal of Applied Geophysics*, **41**, 1–17
- Gyulai, Á., Ormos, T. & Dresen, L., (2000). A joint inversion method to solve problems of layer boundaries, differently defined by seismics and geoelectrics. *Proceedings of the 6th Meeting of the EEGS-ES, Bochum*, P–CH04
- Han, D., Nur, A. & Morgan, D., (1986). Effects of porosity and clay content on wave velocities in sandstones. *Geophysics*, **51**, 2093–2107
- Haskell, N.A., (1953). The dispersion of surface waves in multi-layered media. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **43**, 17–34
- Haverkamp, R., Vauclin, M., Touma, J., Wierenga, P.J. & Vachaud, G., (1977). A comparison of numerical simulation models for one-dimensional infiltration. *Soil Science Society of America Journal*, **41**, 285–294
- Haverkamp, R. & Vauclin, M., (1981). A comparative study of three forms of the Richards equation used for predicting one-dimensional infiltration in unsaturated soil. *Soil Science Society of America Journal*, **45**, 13–20
- Hering, A., Misiak, R., Gyulai, Á., Ormos, T., Dobróka, M. & Dresen, L., (1995). A joint inversion algorithm to process geoelectric and surface wave data. Part I: basic ideas. *Geophysical Prospecting*, **43**, 135–156
- Hills, R.G., Hudson, D.B., Porro, I. & Wierenga, P.J., (1989). Modeling one-dimensional infiltration into very dry soils. 2. Estimation of the soil water parameters and model predictions. *Water Resources Research*, **25,6**, 1271–1282
- Irmay S., (1954). On the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Transactions of the American Geophysical Union*, **35**, 463–468
- Johnson, D.L., Koplik, J. & Dashen, R., (1987). Theory of dynamic permeability and tortuosity in fluid-saturated media. *Journal of Fluid Mechanics*, **176**, 379–402
- Kammer, D.C., (1991). Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **14,2**, 251–259
- Kantorowitsch, L.W. & Akilow, G.P., (1964). Funktionalanalysis in normierten Räumen (dt. Übersetzung). *Verlag Harry Deutsch, Thun*

- Kennett, B.L.N., (1976). The inversion of surface wave data. *Pure and Applied Geophysics*, **114**, 746–751
- Kennett, B.L.N., Sambridge, M.S. & Williamson, P.R., (1988). Subspace methods for large inverse problems with multiple parameter classes. *Geophysical Journal International*, **94**, 237–247
- Kim, H.-S. & Lee, K., (1996). Response of a multilayered earth with layers having exponentially varying resistivities. *Geophysics*, **61,1**, 180–191
- Knight, R., (1991). Hysteresis in the electrical resistivity of partially saturated sandstones. *Geophysics*, **56,12**, 2139–2147
- Knight, R. & Dvorkin, J., (1992). Seismic and electrical properties of sandstones at low saturations. *Journal of Geophysical Research*, **97,B12**, 17425–17432
- Lanczos, C., (1958). Linear systems in self-adjoint form. *Am. math. Monthly*, **65**, 665–679
- Landisman, M., Dziewonski, A. & Sato, Y., (1969). Recent improvements in the analysis of surface wave observations. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **17**, 369–403
- Luenberger, D.G., (1973). Introduction to linear and nonlinear programming. *Addison-Wesley, Reading, Mass.*
- Madden, T.R., (1976). Random networks and mixing laws. *Geophysics*, **41**, 1104–1125
- Marion, D. & Nur, A., (1989). Percolation of electrical and elastic properties of granular materials at the transition from a suspension to a loose packing. *Physica*, **A,157**, 575–579
- Mindlin, R.D., (1949). Compliance of elastic bodies in contact. *ASME Journal of Applied Mechanics*, **16**, 259–268
- Murphy, W., Winkler, K.W. & Kleinberg, R.L., (1986). Acoustic relaxation in sedimentary rocks: Dependence on grain contacts and fluid saturation. *Geophysics*, **53,1**, 757–766
- Murphy, W., Reischer, A. & Hsu, K., (1993). Modulus decomposition of compressional and shear velocities in sand bodies. *Geophysics*, **58,2**, 227–239
- Nolen-Hoeksema, R.C., (1993). Porosity and consolidation limits of sediments and Gassmann's elastic-wave equation. *Geophysical Research Letters*, **20,9**, 847–850
- Poston, W.L. & Tolson, R.L., (1992). Maximizing the determinant of the information matrix with the effective independence distribution method. *AIAA Journal of Guidance, Control and Dynamics*, **15,6**, 1513–1514

- Poston, W.L., Wegman, E.J. & Solka, J.L., (1998). A parallel algorithm for subset selection. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **60**, 1–17
- Richards, L.A., (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, **I**, 218–333
- Roberts, J.N. & Schwartz, L.M., (1985). Grain consolidation and electrical conductivity in porous media. *Physical Review*, **31,9**, 5990–5997
- Rowbotham, P. S. & Pratt, R. G., (1997). Improved inversion through use of the null space. *Geophysics*, **62,3**, 869–883
- De la Rue, R.E. & Tobias, C.W., (1959). On the Conductivity of Dispersions. *Journal of the Electrochemical Society*, **106**, 827–833
- Schopper, J.R., (1966). A theoretical investigation on the formation factor / permeability / porosity relationship using a network model. *Geophysical Prospecting*, **14,3**, 301–341
- Schwab, F., (1970). Surface–wave dispersion computations: Knopoff’s method. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 1491–1520
- Schwab, F. & Knopoff, L., (1970). Surface–wave dispersion computations. *Bulletin of the Seismological Society of America*, **60**, 321–344
- Sen, P.N., Scala, C. & Cohen, M.H., (1981). A self–similar model for sedimentary rocks with application to the dielectric constant of fused glass beads. *Geophysics*, **46,5**, 781–790
- Smith–Rose, R.L., (1934). Electrical measurements on soil with alternate current. *J. Inst. Elect. Engrs.*, **75**, 221–237
- Stefanescu, S.S., Schlumberger, C. & Schlumberger, M., (1930). Sur la distribution électrique potentiel autour d’une pique de terre ponctuelle dans un terrain a couches horizontales, homogènes, et isotropes. *Journal de Physique et le Radium*, **1**, 132–140
- Suman, R.J. & Knight, R.J., (1997). Effects of pore structure and wettability on the electrical resistivity of partially saturated rocks — A network study. *Geophysics*, **62,4**, 1151–1162
- Taherian, M.R., Kenyon, W.E. & Safinya, K.A., (1990). Measurement of dielectric response of water–saturated rocks. *Geophysics*, **55,12**, 1530–1541
- Tarantola, A., (1987). Inverse Problem Theory: Methods for Data Fitting and Model Parameter Estimation. *Elsevier, Amsterdam*
- Thomson, W.T., (1950). Transmission of elastic waves through a stratified solid medium. *Journal of Applied Physics*, **21**, 89–93

- Thorp, J.M., (1959). The dielectric behavior of vapours adsorbed on porous solids. *Transactions of the Faraday Society*, **55**, 442–454
- Tillmann, A., (1997). Extraktion von Dispersionskurven aus Zeit–Frequenz–Analysen mittels neuronaler Netze. *Diplomarbeit, Institut für Geophysik, Ruhr–Universität Bochum*
- Tillmann, A., (2000). A new approach for inverting surface waves containing higher modes. *Proceedings of the 6th Meeting of the EEGS-ES, Bochum*, P–SE03
- Tosaya, C. & Nur, A., (1982). Effects of Diagenesis and clays on compressional velocities in rocks. *Geophysical Research Letters*, **9,1**, 5–8
- Tutuncu, A.N. & Sharma, M.M., (1992). The influence of fluids on grain contact stiffness and frame moduli in sedimentary rocks. *Geophysics*, **57,12**, 1571–1582
- Vozoff, K. & Jupp, D.L.B., (1975). Joint inversion of geophysical data. *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **42**, 977–991
- Winkler, K.W., (1983). Contact stiffness in granular porous materials: Comparison between theory and experiment. *Geophysical Research Letters*, **10,11**, 1073–1076
- Winkler, K.W., (1985). Dispersion analysis of velocity and attenuation in Berea sandstone. *Journal of Geophysical Research*, **90,B8**, 6793–6800
- Wong, P.–Z., Koplik, J. & Tomanic, J.P., (1984). Conductivity and permeability of rocks. *Physical Review*, **B 30,11**, 6606–6614
- Wyllie, M.R., Gregory, A.R. & Gardner, G.H.F., (1956). Elastic wave velocities in heterogeneous and porous media. *Geophysics*, **21,1**, 41–70
- Wyllie, M.R., Gregory, A.R. & Gardner, G.H.F., (1958). An experimental investigation of factors affecting elastic wave velocities in porous media. *Geophysics*, **23,3**, 459–493

# Danksagung

Die vorliegende Arbeit wurde am Institut für Geologie, Mineralogie und Geophysik der Ruhr-Universität Bochum innerhalb der Arbeitsgruppe Seismik angefertigt. Ich danke Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Lothar Dresen, der die Arbeit betreute und dessen Unterstützung weit über eine rein fachspezifische hinausging.

Diese Arbeit entstand innerhalb des Gemeinschaftsprojektes „Grenzflächenproblematik“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DR 110/8–1) und der Ungarischen Akademie der Wissenschaften (30008/70/96). Für die Bereitstellung der Felddaten und die fachlichen Diskussionen bedanke ich mich bei den Drs. Michael Dobróka, Ákos Gyulai und Tamas Ormos.

Für das gute Arbeitsklima möchte ich meinen Kolleginnen und Kollegen in der Arbeitsgruppe Seismik herzlich danken. Dieser Dank gilt sowohl für die fachbezogenen Diskussionen als auch für jegliche Art von moralischer und praktischer Unterstützung. Insbesondere möchte ich mich bei Sandra Tegtmeier für ihre Hilfe bei der Untersuchung der 2D-Problematik bedanken, auch wenn die Früchte dieser Arbeiten zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht geerntet werden konnten.

Der größte Dank gebührt meinem langjährigen Kollegen Dr. Tony Stöcker. Sein strukturiertes und abstraktes Denken, über die Grenzen seines eigenen Fachgebietes hinaus, führen immer wieder zu fruchtbaren Diskussionen und neuen Ansätzen. Ohne sein Engagement wären viele Projekte in dieser Arbeitsgruppe nicht so erfolgreich verlaufen.

Dank gebührt auch Clemens Schmitz, der diese Arbeit hinsichtlich formaler Fehler und leichter Verständlichkeit korrigiert hat.

Ferner möchte ich meiner Familie und meinen Freunden für ihre Geduld, Verständnis und Unterstützung danken.

Mein allerliebster Dank, vor allem wegen ihres Durchhaltevermögens in den entbehrungsreichen letzten Monaten, geht an meine liebste Christiane und ... Pünktchen.

Bisher sind in der Reihe

**Berichte des Instituts für  
Geologie, Mineralogie und Geophysik  
der Ruhr-Universität Bochum**

Reihe A (Geophysik)

erschienen:

**Nr. 1: L. Dresen**

Modellseismische Untersuchungen zum Problem der Ortung oberflächennaher Hohlräume in Festgestein

*Mai 1972*

**Nr. 2: R. Schepers**

Bearbeitungsverfahren zur Bestimmung oberflächennaher Strukturen aus Einkanal-Reflexionsseismogrammen bei senkrechtem Einfall

*Juli 1972*

**Nr. 3: S. Freystätter**

Modellseismische Untersuchungen zur Anwendung von Flözwellen für die untertägige Vorfelderkundung im Steinkohlenbergbau

*Juni 1974*

**Nr. 4: F. Rummel**

Experimentelle Untersuchungen zum Bruchvorgang in Gesteinen

*Januar 1975*

**Nr. 5: H. Rüter**

Anwendung reflexionsseismischer Verfahren bei der Erkundung oberflächennaher horizontal geschichteter Lockergesteine

*Februar 1975*

**Nr. 6: R. Pelzing**

Untersuchungen zur Ortung von Herden seismischer Ereignisse, dargestellt an Beispielen aus einem Stationsnetz im Ruhrbergbaugesamt

*Juni 1978*

**Nr. 7: C.-H. Hsieh**

Ortung verdeckter Bergwerksschächte mit Hilfe von Rayleigh-Wellen

*Januar 1979*

Nr. 8:**G. Ullrich**

Stapelung, Migration und Dekonvolution von Reflexionsseismogrammen aus zyklisch geschichteten Untergrundsstrukturen mit tektonischen Störungen

*Juni 1979*

Nr. 9:**U. Bleil**

Die Magnetisierung der ozeanischen Kruste. Ein Beitrag zum Vine-Matthews-Modell nach Ergebnissen mariner Tiefbohrungen

*Dezember 1981*

Nr. 10:**H.-J. Alheid**

Untersuchungen von Bruch und Scherprozessen im Granit und Serpentin bei hohen Drücken und Temperaturen

*Dezember 1981*

Nr. 11:**W. Hanka**

Analyse breitbandiger Oberflächenwellen – eine Möglichkeit zur seismischen Diskriminierung

*Februar 1982*

Nr. 12:**H. Sommer**

Untersuchungen zur Ortung oberflächennaher Hohlräume mit gravimetrischen Verfahren

*Januar 1983*

Nr. 13:**R.-B. Winter**

Bruchmechanische Gesteinsuntersuchungen mit dem Bezug zu hydraulischen Frac-Versuchen in Tiefbohrungen

*Dezember 1983*

Nr. 14:**C. Kerner**

Untersuchungen an zweidimensionalen analogen und numerischen Modellen zur Transmission und Reflexion von Love- und Rayleigh-Flözwellen

*Januar 1984*

Nr. 15:**K.-G. Hinzen**

Vergleich von Herdflächenlösungen und Momententensoren

*Januar 1984*

Nr. 16:**N. Weinreich**

Magnetische Untersuchungen neogener pelagischer Sedimente des zentralen Äquatorialpazifik

*Februar 1985*

Nr. 17:**V. Spieß**

Analyse und Interpretation zwei- und dreidimensionaler mariner magnetischer Anomalien

*November 1985*

Nr. 18:**J. Meister**

Möglichkeiten und Grenzen hybriden und seismischen Modellierens

*November 1985*

Nr. 19:**R.-G. Ferber**

Berechnung der zeitlichen Entwicklung der Felder transienter Wellen in geschichteten elastischen Medien

*März 1986*

Nr. 20:**R. Jung**

Erzeugung eines großflächigen künstlichen Risses im Falkenberger Granit durch hydraulisches Spalten und Untersuchung seiner mechanischen und hydraulischen Eigenschaften

*April 1986*

Nr. 21:**J. Baumgärtner**

Anwendung des Hydraulic-Fracturing-Verfahrens für Spannungsmessungen im geklüfteten Gebirge dargestellt anhand von Meßergebnissen aus Tiefbohrungen in der Bundesrepublik Deutschland, Frankreich und Zypern

*April 1987*

Nr. 22:**W. Müller**

Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Rißausbreitung im anisotropen Gestein in der Nähe von Grenzflächen

*Juni 1987*

Nr. 23:**M. Joswig**

Methoden zur automatischen Erfassung und Auswertung von Erdbeben in seismischen Netzen und ihre Realisierung beim Aufbau des lokalen BOCHUM UNIVERSITY GERMANY - Netzes

*Juli 1987*

Nr. 24:**R. Elsen**

Die Ortung oberflächennaher Hohlräume mit Verfahren der Geoelektrik

*November 1987*

Nr. 25:**M. Redanz**

Waveletextraktion und Inversion von Reflexionsseismogrammen zur Ableitung von akustischen Impedanzen

*Juli 1988*

Nr. 26:**G. Möhring-Erdmann**

Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Entstehung von Bohrloch-  
randausbrüchen

*März 1989*

Nr. 27:**E. Räkera**

Seismoakustische Ereignisse in Steinkohleflözen als Hilfe zur Erkennung von Abbau-  
bereichen mit erhöhten Gebirgsdrücken

*Juni 1989*

Nr. 28:**M. Breitzke**

Ein Normalmodensummutations- und Frequenz-Wellenzahl-Verfahren zur Modellie-  
rung, Rekompensation und Migration dispersiver Flözwellen

*Februar 1990*

Nr. 29:**D. Krollpfeifer**

Experimentelle modellseismische Untersuchungen zum gezielten Anschließen von  
Flözstrukturen mit P- und SV-Wellen

*November 1990*

Nr. 30:**H. Krummel**

Rechnergestützte Verfahren der seismischen Stratigraphie

*Januar 1991*

Nr. 31:**E. Rybacki**

Experimentelle Festigkeitsuntersuchungen an inhomogen-anisotropen Gneisen und  
Granuliten bei hohen Drücken und Temperaturen

*Januar 1991*

Nr. 32:**S. Menger**

Experimentelle und numerische Untersuchungen zum Problem der Dezentrierung  
beim Akustischen Bohrloch Televiever

*Dezember 1991*

Nr. 33:**B. Lehmann**

Modellseismische Untersuchungen zur Transmissions- und Reflexions-Tomographie  
unter Verwendung der Gauß-Beam-Methode

*Januar 1992*

Nr. 34:**E. Al-Tarazi**

Investigation and Assessment of Seismic Hazard in Jordan and its Vicinity

*November 1992*

Nr. 35:**F. Roth**

Modellierung von Vorgängen an Verwerfungen mit Hilfe der Dislokationstheorie

*Dezember 1992*

- Nr. 36:**C. Schneider**  
Erkundung des Untergrundes von Deponien und Altlasten mit Rayleigh-Oberflächenwellen  
*Juli 1993*
- Nr. 37:**M. Kemper**  
Migration bohrlochseismischer Ereignisse  
*Dezember 1993*
- Nr. 38:**Tao Yu**  
Numerische Modellierungen zur Untersuchung des Einflusses von lokalen Irregularitäten auf die Ausbreitung von Love-Wellen in geschichteten Medien  
*Dezember 1993*
- Nr. 39:**U. Casten**  
Untertagegravimetrie zur in situ Bestimmung des Gesteinsparameters Dichte und zur Erfassung bergbauinduzierter Dichteänderungen  
*September 1994*
- Nr. 40:**C. Bönnemann**  
Bestimmung seismischer Geschwindigkeiten aus Steilwinkelreflexionen im p-t-Bereich  
*Mai 1995*
- Nr. 41:**H. Schulte-Theis**  
Automatische Lokalisierung und Clusteranalyse regionaler Erdbeben  
*Juni 1995*
- Nr. 42:**J. Wüster**  
Diskrimination von Erdbeben und Sprengungen im Vogtlandgebiet und Nordwest-Böhmen  
*Mai 1995*
- Nr. 43:**M. Janik**  
Experimente zur seismischen Nutzung des Bohrgeräusches an der Kontinentalen Tiefbohrung der Bundesrepublik Deutschland (KTB)  
*Juli 1995*
- Nr. 44:**D. Orlowsky**  
Erhöhung des Auflösungsvermögens der Common Mid Point- (CMP-) Refraktionsseismik durch eine Kombination mit der Generalized Reciprocal Method (GRM)  
*Januar 1996*

- Nr. 45:**B. Dombrowski**  
3D-modeling, analysis and tomography of surface wave data for engineering and environmental purposes  
*Februar 1996*
- Nr. 46:**A. Liebig**  
Zweidimensionale geoelektrische Inversion als Teil einer integrierten geophysikalischen Auswertung zur Erkundung oberflächennaher Schichten  
*Juni 1996*
- Nr. 47:**Y. Jia**  
Bestimmung der scheinbaren Dämpfung seismischer Wellen in der europäischen Lithosphäre  
*Juli 1996*
- Nr. 48:**J. Renner**  
Experimentelle Untersuchungen zur Rheologie von Coesit  
*Juli 1996*
- Nr. 49:**L. te Kamp**  
Numerische Modellierungen von Rißwechselwirkungen  
*Juli 1996*
- Nr. 50:**R. Misiak**  
Surface waves: Application to lithostructural interpretation of near-surface layers in the meter and decameter range  
*November 1996*
- Nr. 51:**G. Bokelmann**  
Seismological constraints on anisotropy of the Earth's crust with emphasis on array methods  
*April 1997*
- Nr. 52:**I. Heyde**  
Integrierte Interpretation gravimetrischer und magnetischer Daten am Beispiel KTB  
*Mai 1999*
- Nr. 53:**M. Joswig**  
Raum-zeitliche Seismizitätsanalysen mit Methoden zur Handhabung von unvollständigem Wissen  
*Dezember 1999*
- Nr. 54:**T. Stöcker**  
Local spectral analysis and synthesis for seismic signal processing  
*Juli 2000*

Nr. 55:**M. Knapmeyer**

Abbildung seismischer Diskontinuitäten in der südlichen Ägäis mit migrierten Receiver Functions

*Juli 2000*

Nr. 56:**A. Kemna**

Tomographic Inversion of Complex Resistivity - Theory and Application

*Juli 2000*

Nr. 57:**S. Baisch**

Zur Messung zeitlicher Veränderungen seismischer Wellenausbreitungseigenschaften in der oberen Erdkruste

*November 2000*

Nr. 58:**S. Sauerländer**

3-D Inversion geomagnetischer Daten mit einem Simulated Annealing Ansatz

*November 2000*