

OCENA BŁĘDÓW OPRÓBOWANIA ZŁÓŻ – STATYSTYCZNY NIEZBĘDNIK GEOLOGA GÓRNICZEGO

ASSESSMENT OF DEPOSIT SAMPLING ERRORS – STATISTICAL TOOL OF MINING GEOLOGIST

Jacek Mucha, Monika Wasilewska - Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków

Zaproponowano podstawowy zestaw instrumentów statystycznych dla oceny błędów opróbowania i analiz chemicznych. Obejmuje on testy: t-Studenta i rangowanych znaków Wilcozona dla porównania średnich wartości pomiarów sparowanych, analizę korelacji i regresji liniowej dla wydzielenia i oceny wielkości błędów: losowego i systematycznych (stałego i proporcjonalnego). Wymienione metody zastosowano do oceny błędów oznaczeń pierwotnych i powtórnych zawartości Zn w próbkach pobranych ze złoża Olkusz-Pomorzany. Wskazano na inne możliwości zastosowania zaproponowanej metodyki oceny błędów np. do porównania różnych metod oszacowania parametrów złożowych w tych samych partiach złoża.

The basic statistical set of tools for estimation of sampling errors on the basis of the two paired data set is proposed. It includes t-Student and the signed rank tests for a comparison of mean values in paired samples, and analysis of a simple linear model of regression to distinguish and assess the three types of error in paired data: random error, proportional and fixed bias. A use of the mentioned methods has been illustrated by examples of evaluation of errors of Zn assay in analytical samples from the Upper Silesian Zn-Pb ore deposits. The suggested methodology may be applied for geological reporting: a comparison of resource evaluation by two different methods, or in a case of evaluation based on two different sampling techniques (channel samples taken from deposit on site and samples taken from broken ore).

Wprowadzenie

Jednym z niezbędnych warunków wiarygodnego szacowania zasobów i jakości kopaliny jest wysoka jakość opróbowania złoża i oznaczeń składników w pobranych próbkach. Ta oczywista i nie podlegająca dyskusji teza często nie znajduje należnego zrozumienia u geologów dokumentujących złoża. W konsekwencji ten ważny element rozpoznania złóż nie zawsze ma właściwe odzwierciedlenie w dokumentacji geologicznej stanowiącej podstawę racjonalnej gospodarki złożem. Opisy zastosowanej metodyki opróbowania i analiz chemicznych są z reguły nader skąpe a ocena ich wiarygodności z reguły pomijana.

Szeroko rozumiany proces bezpośredniego opróbowania złoża obejmuje [8]:

- pobranie próbki pierwotnej ze złoża *in situ* (opróbowanie pierwotne),
- przygotowanie tej próbki do analizy chemicznej obejmujące redukcję masy próbki pierwotnej do wielkości próbki analitycznej (opróbowanie wtórne) i wszystkie czynności jej towarzyszące,
- analizę chemiczną naważki pobranej z próbki analitycznej.

W odniesieniu do indywidualnej próbki, błędy opróbowania pierwotnego związane są z niezachowaniem parametrów próbki przewidzianych w projekcie opróbowania złoża (wielkości, kształtu i orientacji próbek). Oszacowanie ilościowe wielkości tych błędów jest trudne z uwagi na niepowtarzalność opróbowania bezpośredniego. Powtórne pobranie w najbliższym sąsiedztwie próbki nie stanowi pełnej, a jedynie przybliżonej podstawy weryfikacji poprawności opróbowania pierwotnego. Oznaczenia zawartości składników w takich próbkach mogą wykazywać duże różnice, gdy złożo cechuje się dużą, skokową zmiennością lokalną mineralizacji.

Błędy opróbowania wtórnego związane są z pomniejszaniem próbki pierwotnej do wielkości próbki analitycznej i obejmują również błędy wszystkich czynności towarzyszących tej procedurze takich jak: kruszenie i rozdrabnianie materiału skalnego oraz jego mieszanie, suszenie i przesiewanie. Błąd standardowy tej procedury może być oceniony teoretycznie w oparciu o formułę Gy [3, 4, 5]. Uwzględnia ona takie czynniki jak stopień skruszenia materiału próbki przed każdym etapem jej pomniejszania, stopień redukcji masy próbki, skład mineralny i granulometryczny, kształt ziaren i stopień uwolnienia ziaren mineralnych zawierających składnik użyteczny ze zrostów. Szczególnie ten ostatni element jest trudny do ilościowego oszacowania i może niekiedy stanowić źródło wątpliwości, co do poprawności oceny dokładności opróbowania wtórnego według formuły Gy.

Błędy analiz chemicznych obejmują błędy pobrania naważki z próbki analitycznej i błędy zastosowanej metody analitycznej. Błąd samej metody analitycznej uważa się jednak za znikomo mały w porównaniu z błędami pobrania naważki z próbki analitycznej [8].

Najbardziej wiarygodnych danych dla oceny błędów opróbowania dostarczają powtarzalne pomiary lub oszacowania wartości analizowanego parametru złożowego dokonane w tym samym obiekcie geologicznym (np. w bloku eksploatacyjnym, próbce). Dane te zwane dalej w skrócie danymi lub pomiarami sparowanymi można uzyskać przykładowo przez oznaczenie zawartości badanego składnika w dwóch podpróbkach otrzymanych po pierwszej redukcji połówkowej próbki pierwotnej (błędy opróbowania wtórnego) lub przez oznaczenia składnika w naważkach pobranych z tej samej próbki analitycznej (błędy analiz chemicznych). W obu przypadkach istnieje wiele wariantów otrzymania pomiarów sparowanych wynikających z zastosowania różnych metod, wykonania analiz przez te same lub różne osoby, w tym samym lub różnych laboratoriach itp.

W artykule przedstawiono skrótowo podstawowy zestaw instrumentów statystycznych, służących ocenie wielkości i charakteru błędów opróbowania wtórnego lub analiz chemicznych w przypadku, gdy dysponuje się zbiorem dwukrotnych pomiarów parametrów złożowych. Powinny być one stosowane do oceny jakości danych podstawowych przy rozpoznaniu złóż a jej wyniki zamieszczane w dokumentacjach geologicznych złóż.

Metodyka badań

Pomiary sparowane jako odnoszące się do tego samego obiektu geologicznego powinny wykazywać z oczywistych względów silną korelację. Determinuje to sposób postępowania i dobór właściwych testów statystycznych dla porównania pomiarów w parach przez weryfikację istotności różnic wartości szacowanego parametru.

Dla potrzeb dokumentowania geologicznego złóż można zaproponować następujący tok postępowania mający na celu ocenę wiarygodności danych podstawowych (przede wszystkim oznaczeń zawartości składników):

- wyznaczenie różnic wartości analizowanego parametru w parach pomiarów,
- zilustrowanie rozrzutu wartości różnic za pomocą wykresu: „ramka – wąsy”, histogramu lub dystrybuanty,
- wyróżnienie wartości anomalnych (ekstremalnych) różnic pomiarów sparowanych,
- wstępną oceną błędów systematycznych za pomocą testów t – Studenta lub rangowanych znaków Wilcozona,
- wyznaczenie wielkości błędu losowego i błędów systematycznych (stałego i proporcjonalnego) za pomocą analizy regresji i korelacji liniowej pomiarów sparowanych; analiza taka winna obejmować: estymację parametrów liniowego modelu zależności pomiarów sparowanych, ocenę dopasowania modelu do danych empirycznych, testowanie istotności modelu i jego parametrów oraz sprawdzenie czy spełnione są założenia stosowalności modelu.

Do ilustrowania rozrzutu wartości pomiarów coraz częściej stosuje się w ostatnich latach wykres „ramka – wąsy”, który graficznie lokalizuje położenie dolnego i górnego kwartyła oraz granice wartości ekstremalnych (anomalnych), wyznaczone powyżej górnego kwartyła i poniżej dolnego kwartyła, w odległości równej 3-krotnej różnicy ich wartości [7].

Porównania średnich wartości pomiarów w parach najprościej można dokonać za pomocą testu t -Studenta w wariancie przeznaczonym do badania zmiennych powiązanych (par skorelowanych danych).

Statystyka sprawdzająca hipotezę zerową, że średnia różnica pomiarów w populacji generalnej jest równa zero ma postać [2]:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d} \sqrt{n-1} \quad (1)$$

gdzie:

\bar{d} – średnia arytmetyczna różnic pomiarów d_i w zbiorze danych sparowanych ($d_i = x_i - y_i$), x_i i y_i – wartości parametru według dwóch pomiarów,

s_d – odchylenie standardowe różnic d_i ,

n – liczba par danych.

Statystyka t ma rozkład t -Studenta o $(n-1)$ stopniach swobody. Duże wartości statystyki t , większe od wartości krytycznej t_α

odczytanej z tablic rozkładu t -Studenta dla przyjętego poziomu istotności α (najczęściej 0,05) prowadzą do odrzucenia hipotezy zerowej i przyjęcia hipotezy alternatywnej o statystycznie istotnym zróżnicowaniu pomiarów z małym ryzykiem błędu ($\leq \alpha$), co jest równoznaczne ze stwierdzeniem występowania błędu systematycznego. Gdy $t < t_\alpha$ brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy o identyczności pomiarów. Warunkiem stosowania tego testu jest przynajmniej przybliżona normalność rozkładu różnic wartości pomiarów.

W przypadku, gdy rozkład różnic wyraźnie odbiega od normalnego należy zastosować test rangowanych znaków Wilcozona, który nie wymaga spełnienia założenia normalności rozkładu i jest najmocniejszą, nieparametryczną alternatywą testu t – Studenta dla zmiennych powiązanych. W pierwszej kolejności oblicza się różnice wartości skorelowanych par pomiarów a następnie porządkuje się je w niemalejący bezwzględny ciąg wartości oddzielnie dla dodatnich i ujemnych różnic. Kolejnym wartościom różnic przypisuje się rangi równe ich numerom w ciągu. Sumując rangi oddzielnie dla znaków dodatnich i ujemnych uzyskujemy wartość statystyki T , sprawdzającej hipotezę o identyczności pomiarów sparowanych, jako mniejszej z dwu sum rang tj. $T = \min\{T^+, T^-\}$. Rozkład statystyki T konieczny do testowania można znaleźć w formie tablic w większości dostępnych podręczników statystyki matematycznej. Dla licniejszego zbioru n par danych ($n > 25$ par) celowe jest zestandaryzowanie statystyki T dla uzyskania statystyki W , która ma dobrze znany rozkład normalny (lub bliski normalnemu) o zerowej średniej i jednostkowym odchyleniu standardowym. Statystykę W określa się ze wzoru:

$$W = \frac{T - m_T}{\sigma_T} \quad (2)$$

gdzie: m_T – wartość oczekiwana statystyki $T = \min\{T^+, T^-\}$ wyznaczana ze wzoru:

$$m_T = \frac{n}{4}(n+1) \quad (3)$$

natomiast σ_T - odchylenie standardowe statystyki T wyznaczone ze wzoru:

$$\sigma_T^2 = \frac{n}{24}(n+1)(2n+1) \quad (4)$$

W przypadku gdy obliczona wartość statystyki W jest większa od wartości krytycznej W_α na danym poziomie istotności α (np. dla $\alpha = 0,05$ jest $W_\alpha = 1,96$) hipotezę zerową o braku różnic w pomiarach należy odrzucić czyli przyjąć założenie o statystycznie istotnym zróżnicowaniu pomiarów sparowanych z ryzykiem błędu mniejszym od 0,05. W przeciwnym przypadku ($W < W_\alpha$) brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, co w praktyce oznacza przyjęcie założenia o identyczności pomiarów sparowanych jako hipotezy roboczej.

Oba przedstawione testy pozwalają tylko na wstępne ustalenie czy oba pomiary dają te same rezultaty. Precyzyjniejsze określenie rodzaju i wielkości różnic obu pomiarów może być osiągnięte przez zastosowanie liniowego modelu regresji. Liniowy, empiryczny model zależności par pomiarów y_i (zmienna zależna, objaśniana) i x_i (zmienna niezależna, objaśniająca) uzyskiwany metodą najmniejszych kwadratów ma postać:

$$y_i = b_0 + b_1 x_i + e_i = \hat{y}_i + e_i \quad (5)$$

gdzie:

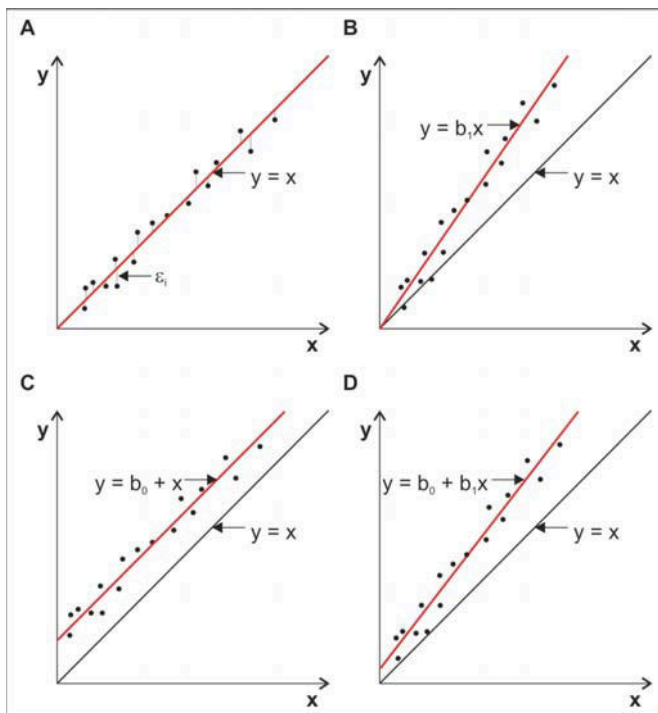
b_0 – wyraz wolny,

b_1 – współczynnik kierunkowy prostej,

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ – reszta, składnik losowy obliczany jako różnica między wartością pomierzoną zmiennej (y_i) i wartością odczytaną z modelu liniowego (\hat{y}_i).

Siłę zależności obu zmiennych charakteryzuje się za pomocą współczynnika determinacji $R^2 \in [0,1]$, określającego udział zmienności wyjaśnionej przez model w całkowitej zmienności zmiennej zależnej. Bliska jedności (lub 100%) wartość współczynnika determinacji i jego statystyczna istotność, zweryfikowana za pomocą odpowiednich testów jest warunkiem koniecznym dla poprawnej oceny błędów pomiarów.

W przypadku idealnej równoważności pomiarów x_i i y_i ich zależność opisuje linia prosta postaci $y=x$ (rys. 1).



Rys. 1. Rodzaje błędów danych sparowanych odczytywanych z modelu regresji liniowej [6];

- A) błąd losowy ε_i zmiennej y , B) błędy: losowy i systematyczny proporcjonalny, C) błędy: losowy i systematyczny stały, D) błędy: losowy oraz systematyczny proporcjonalny i stały

W liniowym modelu zależności, określonym na podstawie danych empirycznych miarą błędu losowego pomiaru jest błąd standardowy estymacji s_e , który informuje o przeciętnej wielkości odchylen empirycznych wartości zmiennej zależnej (objaśnianej) od wartości wyliczonych z modelu (teoretycznych) (rys. 1), obliczony ze wzoru:

$$s_e = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n e_i^2}{n-2}} \quad (6)$$

gdzie:

$e_i = y_i - \hat{y}_i$ – różnica między wartością pomierzoną zmiennej (y_i) i wartością odczytaną z modelu liniowego (\hat{y}_i);

n – liczba par pomiarów

Względny błąd losowy można ocenić odnosząc wielkość

błędu standardowego estymacji s_e do średniej wartości pomiarów reprezentowanych na osi y :

$$s_{ew} = \frac{s_e}{\bar{y}} \cdot 100\% \quad (7)$$

Odchylenie wyrazu wolnego b_0 od zera informuje o wielkości błędu systematycznego stałego natomiast odchylenie współczynnika kierunkowego b_1 od wartości 1 o wielkości błędu systematycznego proporcjonalnego (rys.1). Przeciętne wielkości względnych błędów systematycznych można wyznaczyć ze wzorów:

$$\text{- stały - } \varepsilon_{sw} = \frac{b_0}{\bar{y}} \cdot 100\% \quad (8)$$

$$\text{- proporcjonalny - } \varepsilon_{spw} = (b_1 - 1) \cdot 100\% \quad (9)$$

W praktyce często obserwuje się złożony charakter błędów, przejawiający się ich różnym rodzajem i wielkością w zależności od przedziału wartości mierzonego parametru. Konieczne w takich sytuacjach jest badanie zależności liniowej pomiarów sparowanych oddzielnie dla wydzielonych, na podstawie wykresu zależności dla wszystkich danych, przedziałów wartości analizowanego parametru.

Równoważność wyników dwukrotnych pomiarów parametru weryfikuje się statystycznie przez badanie czy empiryczny model liniowy nie jest odchyłony w sposób statystycznie istotny od modelu teoretycznego opisanego równaniem $y = x$, tzn. czy jest spełniona złożona hipoteza zerowa, że: $H_0: b_0=0$ i $b_1=1$. Hipotezę zerową weryfikuje się za pomocą testu F , określonego statystyką [7]:

$$F = \frac{nb_0^2 + 2n\bar{x}b_0(b_1 - 1) + (b_1 - 1)^2 \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}{2s_e^2} \quad (10)$$

gdzie:

x_i – wartość pomiaru traktowanego jako zmienna objaśniająca,

\bar{x} – średnia arytmetyczna,

s_e – błąd standardowy estymacji,

n – liczba par pomiarów.

Statystyka F ma rozkład F -Snedecora z $n_1=2$ i $n_2=n-2$ stopniami swobody. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej oznacza w praktyce przyjęcie jako hipotezy roboczej założenia o równoważności obu pomiarów sparowanych. W przypadku odrzucenia hipotezy zerowej sprawdza się, który z warunków nie jest spełniony, weryfikując każdą hipotezę oddzielnie tzn. weryfikując istotność każdego parametru modelu osobno:

$$H_0: b_0=0 \text{ statystyką } t = \frac{|b_0|}{s_{b_0}} \text{ gdzie: } s_{b_0} \text{ - błąd standardowy oceny } b_0$$

$$H_0: b_1=1 \text{ statystyką } t = \frac{|b_1 - 1|}{s_{b_1}} \text{ gdzie } s_{b_1} \text{ - błąd standardowy oceny } b_1.$$

Błędy standardowe ocenia się dla danych empirycznych ze wzorów [1]:

$$s_{b_0} = s_{b_1} \sqrt{s_x^2 + (\bar{x})^2} \quad (11)$$

$$s_{b_1} = \frac{s_e}{s_x \sqrt{n}} \quad (12)$$

gdzie:

s_x – odchylenie standardowe pomiarów x_i ,

n – liczba par pomiarów.

Obie statystyki mają rozkład t-Studenta o $n-2$ stopniach swobody.

Wiarygodność opisu lub testowania statystycznej istotności modelu linowego uwarunkowana jest od stopnia spełnienia następujących założeń:

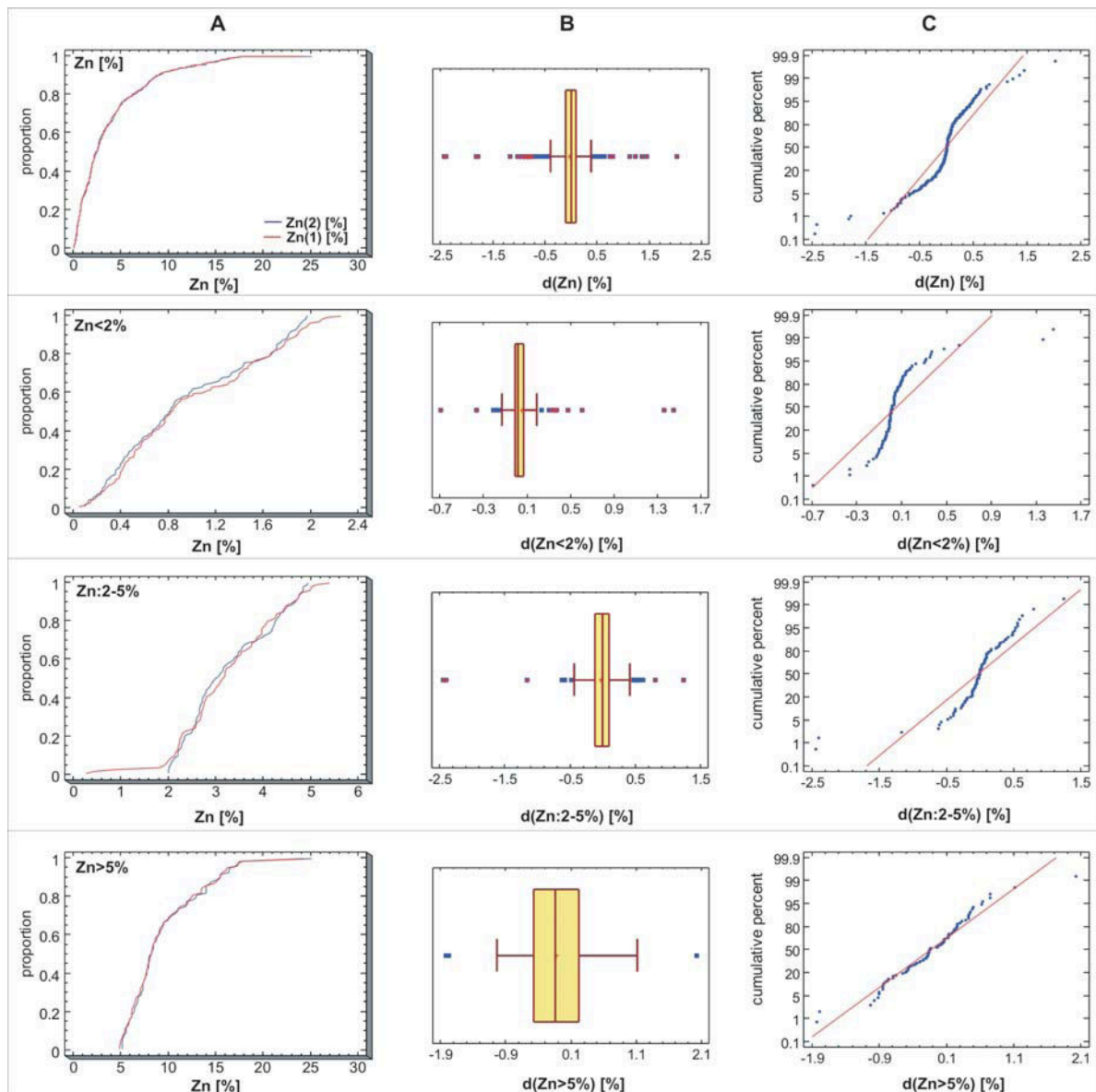
- każdy ze składników losowych ma rozkład normalny,
- wartość oczekiwana składnika losowego jest równa zero a jego wariancja (reszt) jest taka sama dla wszystkich obserwacji (właściwość określana jako homoscedastyczność),
- składniki losowe (reszty) są nieskorelowane (brak autokorelacji).

Wymienione założenia są dość rygorystyczne i rzadko spełnione w pełni w praktyce. Z mocy granicznych twierdzeń centralnych testy istotności modelu mogą być jednak stosowane, gdy liczba par danych jest odpowiednio duża i przekracza 40 bez względu na rozkład składnika losowego [6].

Rygorystyczne również jest założenie stałej wariancji reszt wobec często stwierdzanego wzrostu średniego błędu ze wzrostem wartości pomiarów. Celowe w tej sytuacji jest badanie zależności liniowej pomiarów sparowanych w wydzielonych podziorach danych, w obrębie, których spełnienie tego warunku jest bardziej realne.

Statystycznie istotna autokorelacja reszt powoduje, że metoda najmniejszych kwadratów traci swój optymalny charakter i może zachodzić konieczność powtórnego oszacowania parametrów regresji liniowej [2].

W tym miejscu należy wspomnieć, że nie bez znaczenia dla dalszego wnioskowania jest sposób przypisania dwukrotnym pomiarom roli zmiennych objaśniającej x i objaśnianej y . Zamiana zmiennych prowadzi do różnych oszacowań parametrów modelu liniowego. W przypadku porównywania metod o zbliżonej precyzji, pożyteczne jest przeanalizowanie obu relacji. Należy również dodać, że w tym przypadku zakłada się milcząco, ale niesłusznie, że pomiary reprezentowane przez zmienną objaśniającą nie są obciążone błędem. Rozwiązaniem



Rys. 2. Graficzna ilustracja rozkładów statystycznych oznaczeń podstawowych i powtórnych Zn dla pełnego zbioru danych i 3 wyróżnionych podziorów danych: dystrybuanty empiryczne (A), wykres „ramka i wąsy” (B) oraz test normalności różnic $d(Zn)$ oznaczeń podstawowych i powtórnych (C)
Objaśnienia: do rys. 2B - czerwone kropki - wartości anomalne, do rys. 2C - czerwone linie - teoretyczny rozkład normalny różnic pomiarów

tego zagadnienia jest zastosowanie wariantu regresji liniowej określanej jako RMA (*reduced major axis*) opisanej szerzej m.in. przez Sinclair'a i Blackwell'a [6].

W przypadku, gdy porównujemy nową metodę pomiarów (oznaczenia składnika, szacowania zasobów) z metodą uznaną i bardzo dokładną właściwsze jest traktowanie pomiarów według nowej metody jako zmiennej objaśnianej y , gdyż obliczane z modelu regresji odchylenie standardowe estymacji (miara błędu losowego) odnosi się do zmiennej objaśnianej, która reprezentuje metodę testowaną.

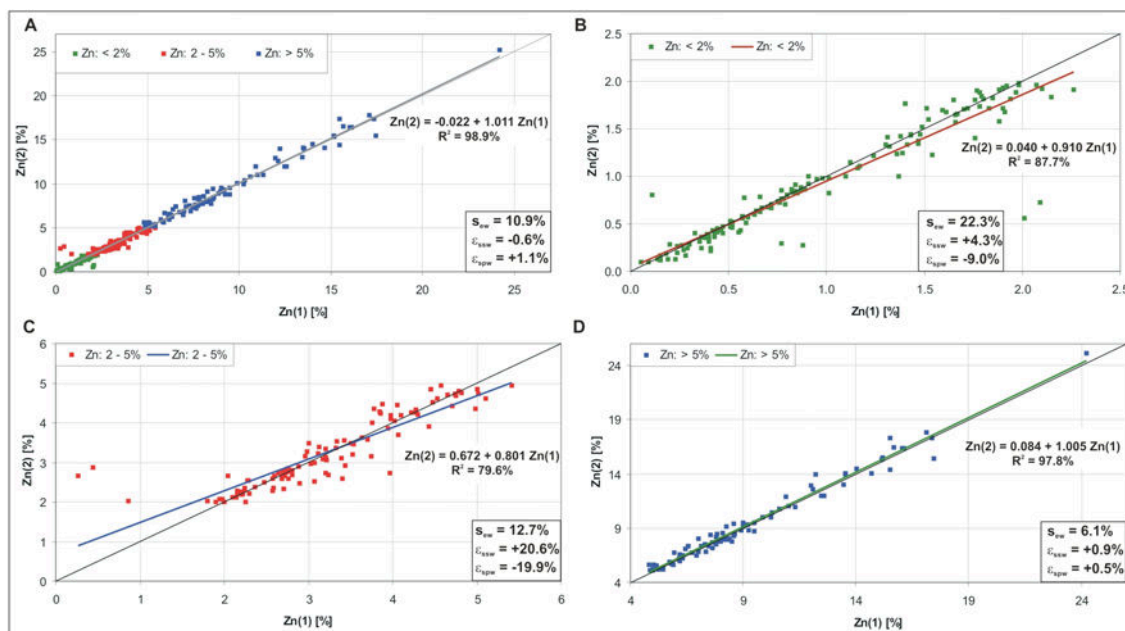
Przykład zastosowania metod

Przedstawiona metodyka porównywania danych sparowanych zastosowana została do oceny błędów analiz chemicznych. Przedmiotem badań były dane archiwalne zaczerpnięte z książek opróbowań kopalń rud Zn-Pb Olkusz - Pomorzany. Stanowiły je pary oznaczeń podstawowych i powtórnych zawartości Zn w 334 próbkach analitycznych otrzymanych przez pomniejszenie próbek pierwotnych pobranych ze złoża w wyrobiskach górniczych. Pełny zbiór par danych podzielono na 3 podzbiory, w których zawartości Zn w oznaczeniach powtórnych wynosiły: <2%, 2-5% i >5%. Ich statystyczną charakterystykę przedstawiono w formie graficznej na rysunku 2.

Wyniki potwierdzają konieczność stosowania przy porównywaniu pomiarów w parach testu rangowanych znaków Wilcozona, nie wymagającego spełnienia założenia normalności rozkładów. Wykresy „ramka – wąsy” pozwalają wyróżnić wartości anomalne różnic oznaczeń, które powinny być przebadane i wyjaśnione np. przez wykonanie dodatkowych analiz w laboratorium rozjemczym w celu ujawnienia ewentualnych błędów grubych. Ich występowanie poważnie zniekształca model zależności pomiarów sparowanych.

Wykresy modeli liniowych zależności oznaczeń podstawowych i powtórnych wraz z oszacowaniami błędów losowego i systematycznych przedstawiono na rysunku 3 natomiast wyniki testowania istotności parametrów modelu w tabeli 1.

Dopasowane modele liniowe cechują się wysokimi i statystycznie istotnymi współczynnikami determinacji (rys. 3). Wyznaczone w oparciu o równania regresji względne błędy losowe oznaczeń powtórnych w wyróżnionych podzbiórach maleją ze wzrostem zawartości oznaczanego pierwiastka. Najwyższe wartości względnych błędów systematycznych odnotowuje się dla przedziału zawartości Zn od 2 do 5%, mniejsze dla przedziału <2% i jedynie w tych dwóch przypadkach oba parametry modelu różnią się równocześnie w sposób statystycznie istotny od zera (wyraz wolny) i jedności (współczynnik kierunkowy prostej) (tab. 1). Dla pełnego zbioru danych



Rys. 3. Modele liniowe zależności oznaczeń podstawowych i powtórnych zawartości Zn w próbkach analitycznych: dla pełnego zbioru danych (A), dla Zn(2) <2% (B), dla 2% < Zn(2) < 5% (C), dla Zn(2) > 5% (D)

R^2 – współczynnik determinacji, s_{ew} – względny błąd standardowy losowy, ε_{ssw} – względny błąd systematyczny stały, ε_{spw} – względny błąd systematyczny proporcjonalny

Zestawione dystrybuanty zawartości Zn według obu oznaczeń wykazują wizualnie duże podobieństwo przebiegu (rys. 2A). Znalazło to pełne potwierdzenie w wynikach testu Kołmogorowa – Smirnowa, który wykazał brak statystycznie istotnych różnic rozkładów badanego parametru dla obu zbiorów pomiarów sparowanych. Wykres „ramka – wąsy” (rys. 2B) ujawnia dla całego zbioru danych oraz podzbiórów: <2% Zn i 2 – 5% Zn występowanie licznych wartości anomalnych różnic oznaczeń, które powodują znaczące odstępstwa od normalności ich rozkładu (rys. 2C). Jedynie w przypadku podzbioru >5% Zn rozkład empiryczny różnic można uważać za zbliżony do normalnego. Wyniki przedstawionego opracowania statystycz-

(i podzbioru z zawartościami Zn > 5%) brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, co pozwala przyjąć jako hipotezę roboczą założenie braku zróżnicowania między uzyskanym modelem empirycznym i modelem teoretycznym opisującym idealną zgodność pomiarów ($y=x$). Podany przykład potwierdza celowość i konieczność badania zależności liniowej nie tylko dla całego zbioru danych, lecz również w jego podzbiórach ze względu na odmiennosc uzyskiwanych wyników.

W pozornej sprzeczności z wynikami analizy liniowego modelu regresji pozostają wyniki porównania średnich oznaczeń w zbiorach za pomocą testu t-Studenta i rangowanych znaków Wilcozona. Rozbieżności w ocenie błędów systema-

tycznych obserwuje się w grupach zawartości 2-5% i >5% Zn (tab. 1).

ale stale zawyża ocenę co prowadzi do statystycznie istotnej różnicy średnich wartości pomiarów według testów: t-Studenta

Tab. 1. Wyniki testowania równości średnich oznaczeń podstawowych i powtórnych zawartości Zn i istotności modelu liniowego ich zależności

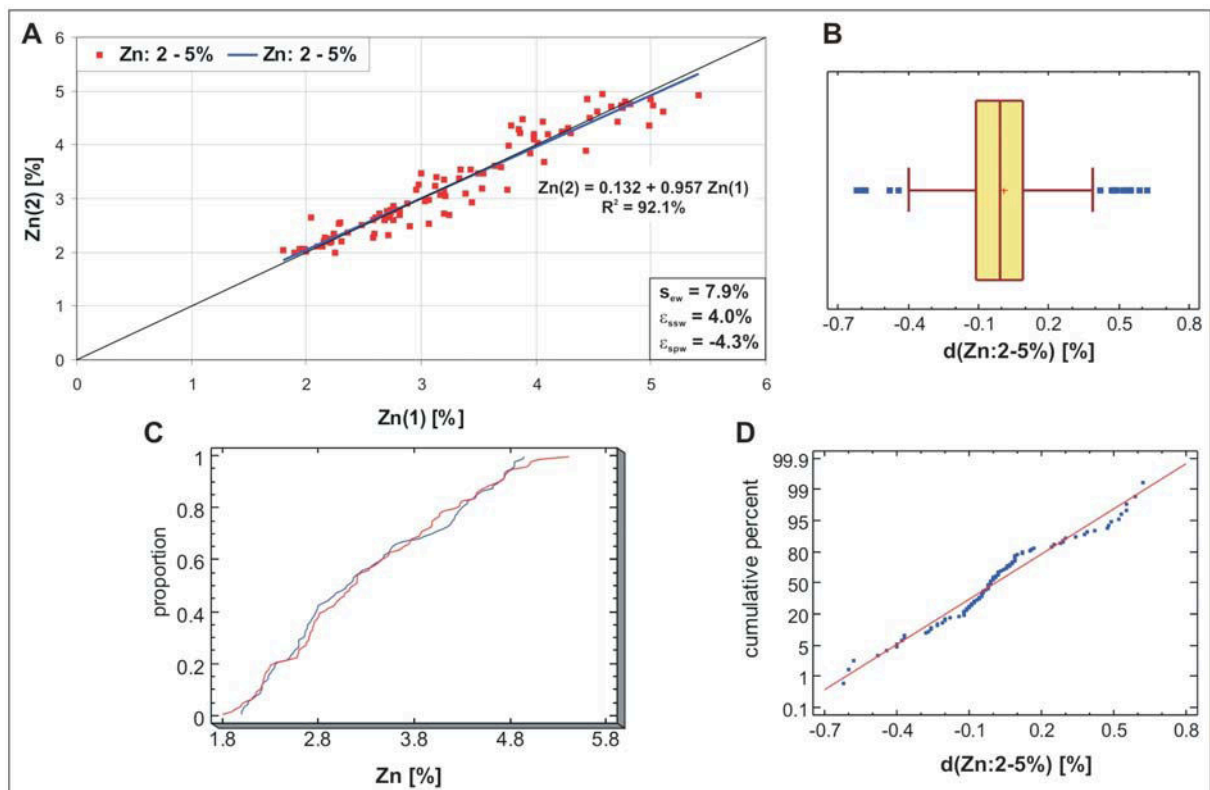
Zbiór par danych i liczba par (n)	Test równości średnich wartości oznaczeń		Test istotności modelu i jego parametrów	
	test t- Studenta	test rangowanych znaków Wilcoxona	$H_0: b_0 = 0$	$H_0: b_1 = 1$
Pełny (n=334)	P=0.35 (+)	P=0.69 (+)	P=0.13 (+)	P=0.05 (+)
Zn(2)<2% (n=143)	P<0.01 (-)	P<0.01 (-)	P<0.001 (-)	P=0.00 (-)
2%<Zn(2)<5% (n=106)	P=0.51 (+)	P=0.81 (+)	P<0.001 (-)	P=0.00 (-)
2%<Zn(2)<5% (n=101)	P=0.74 (+)	P=0.94 (+)	P=0.30 (+)	P=0.13 (+)
Bez 5 różnic anomalnych			P=0.18 (+)	P=0.13 (+)
Zn(2)>5% (n=85)	P=0.04 (-)	P=0.04 (-)	P=0.11 (+)	P=0.67 (+)

P – prawdopodobieństwo błędu odrzucenia hipotezy zerowej (o równości średnich lub, że $b_0 = 0$ lub $b_1 = 1$), gdy jest ona prawdziwa; (+) – brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej na poziomie istotności $\alpha=0.05$ ($P \geq \alpha=0.05$), (-) - odrzucenie hipotezy zerowej ($P < \alpha=0.05$) z ryzykiem błędu $< 5\%$

W pierwszym przypadku brak zróżnicowania średnich jest wynikiem kompensowania się błędów systematycznych: błąd stały zawyża ocenę pomiaru Zn(2) ($b_0 > 0$) natomiast błąd proporcjonalny zaniża ocenę ($b_1 < 1$). W drugim przypadku ($Zn > 5\%$) brak jest podstaw do odrzucenia hipotezy, że b_0 różni się istotnie od zera a b_1 od jedności. Wartość b_0 (0,084) tylko nieznacznie,

i rangowanych znaków Wilcoxona. Należy jednak zwrócić uwagę, że ryzyko błędu odrzucenia hipotezy zerowej o równości średnich jest stosunkowo duże (0,04) i tylko nieznacznie niższe od przyjętego poziomu istotności $\alpha=0,05$.

Wpływ wartości anomalnych na wyniki modelowania zależności pomiarów sparowanych zilustrowano na przykładzie



Rys. 4. Graficzna ilustracja rozkładów statystycznych oznaczeń podstawowych i powtórnych w przedziale 2-5% Zn po odrzuceniu 5 wartości anomalnych: model liniowy zależności oznaczeń podstawowych i powtórnych (A), wykres „ramka i wąsy” (B), dystrybuanty empiryczne (C) oraz graficzny test normalności różnic $d(Zn)$ oznaczeń podstawowych i powtórnych (D)

podzbiór danych $2% < Zn < 5%$. Po usunięciu 5 wartości anomalnych (rys. 3) znaczącej zmianie uległa postać zależności liniowej pomiarów (rys. 4). Testowanie parametrów zmodyfikowanego modelu wykazało, brak podstaw do odrzucenia hipotez, że w populacji generalnej wyraz wolny jest równy zero a współczynnik kierunkowy prostej jest równy 1 (tab. 1). Wyrażnemu obniżeniu uległ również błąd losowy z 12,7% do 7,9%, a systematyczne od około 20% do około 4 %.

Przedstawione wyniki wskazujące na możliwość popełnienia dużych błędów losowych i systematycznych w pewnych zakresach zawartości Zn należy wiązać z błędem niereprezentatywności naważek pobranych z próbek analitycznych a nie z błędem samej techniki oznaczenia pierwiastka. Ich źródła można doszukiwać się w trudności dokładnego ujednorodnienia zmielonego materiału próbki analitycznej lub niestarannego pobrania naważki.

Podsumowanie i wnioski

1. Badanie występowania i wielkości błędów opróbowania systematycznych i losowego powinno być nieodłącznym elementem geologicznego dokumentowania złóż. W przypadku, gdy dysponuje się dwukrotnymi pomiarami wartości parametrów (np. podstawowymi i kontrolnymi oznaczeniami zawartości składnika) można rekomendować stosowanie przedstawionych w artykule instrumentów statystycznych: porównania pomiarów za pomocą testów przeznaczonych dla

- danych sparowanych (t-Studenta, testu rangowanych znaków Wilcoxon) oraz analizę korelacji i regresji liniowej.
2. Analizę taką należy wykonywać nie tylko dla pełnego zbioru danych, ale i dla wydzielonych w myśl pewnych kryteriów podzbiorów danych, gdyż pewne błędy systematyczne mogą się ujawniać tylko w pewnym zakresie wartości parametru. Również wielkości błędów losowych mogą wykazywać różną wielkość pomiędzy grupami danych.
3. Przed wykonaniem analizy regresji i korelacji liniowej należy każdorazowo podejmować próbę wyjaśnienia anomalnie dużych różnic wartości pomiarów sparowanych. Występowanie wartości anomalnych prowadzi na ogół do znaczącego zniekształcenia postaci modelu liniowego i nieprawidłowej oceny błędów losowych i systematycznych.
4. Należy zwrócić uwagę na inne możliwości zastosowania przedstawionych metod statystycznych dla pomiarów sparowanych np. do oceny poprawności oszacowań zasobów lub jakości kopaliny dokonanych różnymi metodami lub oszacowań dokonanych w oparciu o różne zbiory danych np. na podstawie wyników opróbowania wyrobisk górniczych i urobku.
5. Bogata oferta oprogramowania statystycznego (np. programy: Statistica lub Statgraphics) czyni zastosowanie zaproponowanych metod badania danych sparowanych zadaniem łatwym i szybkim do zrealizowania. Wymaga ono jednak od dokumentatora znajomości podstaw statystyki i umiejętności właściwej interpretacji wyników obliczeń.

Praca wykonana w ramach badań statutowych Katedry Geologii Złóżowej i Górniczej AGH nr 11.11.140.562.

Literatura

- [1] Bobrowski D., *Probabilistyka w zastosowaniach technicznych*. WN-T, Warszawa, 514, 1980
- [2] Greń J., *Statystyka matematyczna – modele i zadania*. PWN, Warszawa, 362, 1974
- [3] Gy P., *Sampling of discrete materials – a new introduction to the theory of sampling. I. Qualitative approach. II. Quantitative approach—sampling of zero-dimensional objects*. Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems, Vol. 74, 7 – 38, 2004
- [4] Mucha J., Wasilewska M., *Praktyczne zastosowania teorii opróbowania Gy w geologii górniczej*. Mat. XVI Konferencji z cyklu: „Aktualia i perspektywy gospodarki surowcami mineralnymi”, Zakopane, 15-17.XI.2006, PAN, IGSMiE, Kraków, 259-268, 2006
- [5] Mucha J., Wasilewska M., *Teoria opróbowania Gy i przykłady jej zastosowań w geologii górniczej w Polsce*. Przegląd Górniczy, nr 12, 33 – 38, 2006
- [6] Sinclair A. J., Blackwell G. H., *Applied Mineral Inventory Estimation*. Cambridge University Press, 381, 2002
- [7] Stanisław A., *Przystępny kurs statystyki. T.2. Modele liniowe i nieliniowe*. Wyd. StatSoft, 865, 2007
- [8] Whateley M.K.G., Scott B.C., *Evaluation Techniques*. [W]: Introduction To Mineral Exploration. Eds.: Moon C.J., Whateley M.K.G., Evans A.M., Blackwell Publishing, 199-252, 2006

Artykuł recenzował prof. dr hab. inż. Marek Nieć
Rękopis otrzymano 17.04.2009 r. *2043