

# Wstępne wyznaczanie obszaru zasilania i zasobów ujęcia wody podziemnej

Janusz Hauryłkiewicz<sup>1</sup>



**Prepumping determination of recharge-area and resources of groundwater intake.** Prz. Geol., 58: 991–997.

*Abstract.* The capture area from which groundwater flows to a well and well resources are very important features of groundwater intake. Usually they can be determined on the basis of well pumping test data and using Theis-Jacob's equations. However, evaluations of the above mentioned features are sometimes needed at a preliminary stage, before pumping tests are performed and when equation parameters are still not available. Three pieces of useful advice are here proposed for such cases, namely: using Dupuit's equations for superposition instead of the Theis-Jacob's ones; using a computer program instead of superposition construction by hand; applying a probabilistic approach, using spreadsheet for choosing the suitable groundwater resource value from those obtained by means of different deterministic methods. To explain these tips, some examples regarding an unconfined aquifer are presented.

**Keywords:** groundwater, well feed area, intake resources, computer aid, probabilistic approach

Wyznaczenie obszaru spływu wody podziemnej do studni (OSW), nazywanego też obszarem zasilania ujęcia (OZU), jest zadaniem o podstawowym znaczeniu zarówno w rozwiązywaniu zagadnień ochrony ujęcia, jak i w analizie dopływu wody do ujęcia (Macioszczyk i in., 1992; Balcerkiewicz & Wesolek, 2008). Poprawne rozwiązanie tego zadania powinno odbywać się z wykorzystaniem jednostopniowego próbnego pompowania w reżimie nieustalonym (Dąbrowski & Przybyłek, 2005; Balcerkiewicz & Wesolek, 2008).

Bardzo przystępnym teoretycznie sposobem wyznaczenia OZU jest metoda superpozycji hydroizohips w stanie naturalnym z obniżeniem hydroizohips wskutek eksploatacji. Wyznaczenie wielkości tego obniżenia umożliwia jest właśnie przez pompowanie próbne. Nierzadko jednak trzeba jeszcze przed pompowaniem wstępnie oszacować zarówno OZU, jak i obszar zasobowy. Zaleceniom cytowanej wyżej literatury dość trudno wtedy uczynić zażość, nie mając danych z pompowania, które dotyczyłyby obniżenia w czasie eksploatacji.

Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie trzech ułatwień wstępnego (tj. przed pompowaniem próbnym) rozwiązania wspomnianego zadania podstawowego. Dotyczą one:

- prezentacji wyrażenia matematycznych, wykorzystywanych w metodzie superpozycji, realizowanej w rysunku odręcznym, gdy nie ma się dostępu do odpowiedniego programu komputerowego;
- zastąpienia uciążliwej odręcznej konstrukcji graficznej prognozowanego planu hydroizohips na etapie eksploatacji ujęcia prostą konstrukcją komputerową, gdy ma się dostęp do odpowiedniego programu komputerowego;
- probabilizacji podejścia do analizowania ujawniającej się w pewnych sytuacjach niezgodności między zasobami ujęcia obliczonymi deterministycznie z modułu zasilania i powierzchni OZU a zasobami obliczonymi deterministycznie ze wzoru Dupuita.

## Wyrażenia matematyczne do superpozycji odręcznej i przykład ich wykorzystania

Popularny w Polsce poradnik Macioszczyka i in. (1992) proponuje, aby hydroizohipsy prognozowane na etapie eksploatacji ujęcia wyznaczać jako różnicę rzędnych hydroizohips w stanie naturalnym i wielkości depresji  $s$  w odległości  $r$  od studni, przy czym związek wielkości  $s$  i  $r$  wynika z podanych w poradniku wzorów Theisa lub Theisa-Jacoba, dotyczących pompowania w reżimie nieustalonym. Ponieważ na etapie wstępnym danych do tych wzorów brak, proponuje się tu wykorzystać związek wielkości  $s$  i  $r$ , wynikający ze wzoru Dupuita dla jednostopniowego pompowania w reżimie ustalonym (odległość od studni jako zmienną w analizowanym wzorze Dupuita i na rycinie 1 oznaczono symbolem  $x$  w celu dostosowania do standardowego zapisu podręcznikowego).

Równanie różniczkowe wg Dupuita, określające dopływ  $Q$  wody do studni, ma następujący, powszechnie hydrogeologom znany zapis:

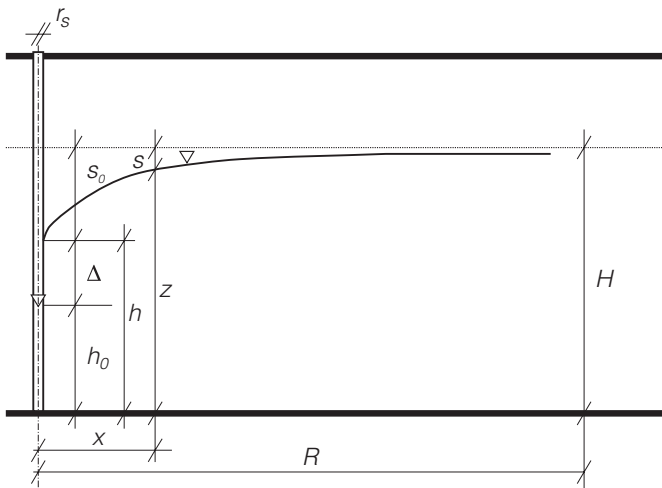
$$Q = 2\pi x k \frac{dz}{dx}, \quad (1)$$

gdzie:

- $x$  – odległość pozioma od studni,
- $z$  – wyniesienie krzywej depresji ponad strop warstwy nieprzepuszczalnej dla współrzędnej  $x$ ,
- $k$  – współczynnik filtracji.

Należy zaznaczyć, że równanie różniczkowe Dupuita ma tę samą postać (1) niezależnie od wartości zeskoku wewnątrz studni, na co zwraca się uwagę w literaturze (Abramow, 1973; Szestakow, 1973; Knaupe, 1979). Trzeba jednak dodać, że dotyczy to wyznaczania krzywej depresji, nie zaś wyznaczania dopływu  $Q$ , gdyż do tego celu należy przyjmować zeskok hydrauliczny  $\Delta = 0$ , tj. głębokość wody podziemnej przy płaszczu studni  $h$  równą głębokości wody w studni  $h_0$  (Szczelkaczew & Łapuk, 1949; Silin-Bekczurin, 1965; Bear i in., 1968).

<sup>1</sup>ul. Gostyńska 58, 60-103 Poznań; wilnowin@gmail.com



**Ryc. 1.** Przyjęte oznaczenia dotyczące studni zupełnej w zbiorniku wody podziemnej o zwierciadle swobodnym;  $H$  – miąższość warstwy wodonośnej;  $h_0$  – głębokość wody w studni;  $h$  – głębokość wody podziemnej przy płaszczyźnie studni;  $\Delta$  – zeskok hydrauliczny;  $s_0$  – depresja zewnętrzna przy płaszczyźnie studni;  $r_s$  – promień zewnętrzny studni;  $x$  – odległość pozioma od osi studni;  $z$  – wzniesienie krzywej depresji ponad strop warstwy nieprzepuszczalnej na współrzędnej  $x$ ;  $s$  – depresja na współrzędnej  $x$ , spowodowana eksploatacją studni;  $R$  – promień depresji

Po rozdzieleniu zmiennych, scałkowaniu i podstawieniu warunków brzegowych dla zewnętrznego promienia studni  $r_s$  oraz dla promienia depresji  $R$ , otrzymuje się znane zależności:

$$Q \ln x = \pi k z^2 + C, \quad (2)$$

$$Q \ln r_s = \pi k h^2 + C, \quad (3)$$

$$Q \ln R = \pi k H^2 + C, \quad (4)$$

gdzie:

$C$  – stała całkowania,

$H$  – miąższość warstwy wodonośnej.

Z tych zależności należy wyznaczyć funkcję  $x(s)$ . Pozwoli ona dla danej wartości depresji eksploatacyjnej  $s$  obliczyć promień  $x = r$  okręgu wokół studni, na którym eksploatacja w zbiorniku spowoduje depresję  $s$ . Przy wyznaczaniu należy wykorzystać relacje z ryciny 1:

$$h = H - s_0, \quad (5)$$

$$z = H - s. \quad (6)$$

Przekształcenia zmierzające do uzyskania funkcji  $r(s)$  nie wykraczają poza poziom matematyki w szkole średniej i pozostawia się je Czytelnikowi, który zechce sprawdzić, że funkcję tę przedstawia wyrażenie:

$$r = r_s \exp \left[ \left( 1 - \frac{s(2H-s)}{s_0(2H-s_0)} \right) \ln \frac{R}{r_s} \right]. \quad (7)$$

Zastosowanie wyrażenia (7) w metodzie superpozycji przebiega w sposób analogiczny do zastosowania wzoru Theisa-Jacoba wg opisu we wspomnianym wyżej popular-

nym poradniku (Macioszczyk i in., 1992), co ilustruje przykład konstrukcji odręcznej na rycinie 2.

Przyjęto studnię zupełną o średnicy zewnętrznej 0,4 m,  $r_s = 0,2$  m, która ma pobierać wodę z wodonośnej warstwy czwartorzędu – aluwiiów doliny rzecznej, ze strumienia o zwierciadle swobodnym, mającym spadek 0,1% i miąższość warstwy wodonośnej w profilu studni  $H = 30$  m. Depresja zewnętrzna przy studni wynosi  $s_0 = 15$  m, zeskok  $\Delta = 5$  m,  $h = 15$  m,  $h_0 = 10$  m, a współczynnik filtracji  $k = 10^{-3}$  m/s, czyli 3,6 m/h.

Promień depresji w zbiorniku o zwierciadle swobodnym (wzór Kusakina):

$$R = 575 s_0 \sqrt{kH} = 575 \cdot 15 \cdot \sqrt{10^{-3} \cdot 30} \approx 1500 \text{ m},$$

$$\ln \left( \frac{R}{r_s} \right) = \ln \left( \frac{1500}{0,2} \right) = 8,9.$$

Ze wzoru (7):

$$r = 0,2 \cdot \exp \left[ 8,9 \cdot \left( 1 - s \cdot \frac{(2 \cdot 30 - s)}{(2 \cdot 30 - 15)} \right) \right]. \quad (8)$$

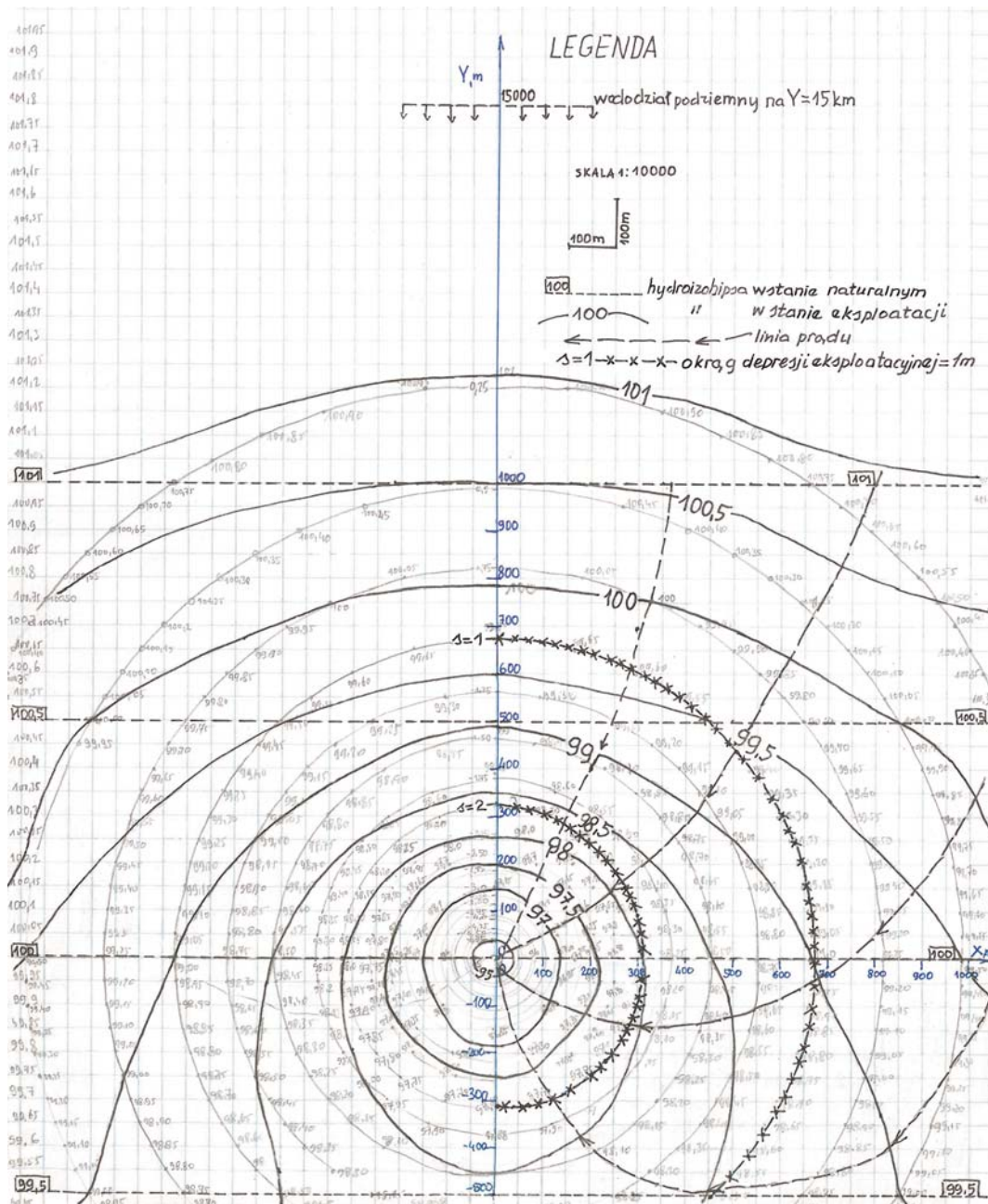
Dla szeregu wartości depresji eksploatacyjnej  $s$  od 0 do 15 m obliczono ze wzoru (8) promienie  $r$  odpowiednich okręgów, (np. dla  $s = 1$  m –  $r = 674$  m, a dla  $s = 2$  m –  $r = 318$  m) i zakreślono nimi okręgi wokół studni na planie hydroizohips pierwotnych w skali 1 : 10 000. Na rycinie 2 wyeksponowano linię z krzyżkami tylko dwa okręgi – dla depresji 1 i 2 m. Punkt przecięcia zakreślonego okręgu dla depresji  $s$  z hydroizohipsą pierwotną (naturalną) o rzędnej  $n$  ma prognozowaną rzędną hydroizohipsy strumienia eksploatawanego, wyrażoną wzorem:

$$p = n - s. \quad (9)$$

Tak wyznaczono wiele punktów z rzędnymi prognozowanymi i na planie tych punktów konstruowano odręcznie izoliny pokazane na rycinie 2 liniami ciągłymi. Naniesiono też kilka prognozowanych linii prądu, wyprowadzanych z osi studni ortogonalnie do hydroizohips prognozowanych. Umieszczono również osie współrzędnych  $x$  i  $y$ . Warto przyrzeć się zmianom, które eksploatacja studni wprowadzi w naturalny układ hydroizohips. I tak, hydroizohipsa  $n = 100$  przecina oś  $Y$  na wartości  $y = 0$ , a podczas eksploatacji hydroizohipsa  $p = 100$  przetnie oś  $Y$  na wartości  $y = 780$ , tworząc wypukłość skierowaną w górę strumienia. Podobnie wyginają się inne hydroizohipsy przy przejściu ze stanu naturalnego do stanu eksploatacji. Rycina obejmuje obszar tylko ok. 1 km od studni, bo pole rysunku jest za małe do pokazania całego OZU. W przekroju studni ( $y = 0$ ) strumień zasilający ujęcie ma szerokość 2 km, która wzrasta w górę strumienia do 4 km. Długość strumienia od studni do wododziału podziemnego wynosi 15 km, zatem OZU ma powierzchnię  $F = 60 \text{ km}^2$ .

#### Komputerowa konstrukcja hydroizohips prognozowanych

Zamiast żmudnego odręcznego konstruowania izoliny z planu prognozowanych rzędnych w reżimie eksploatacji,



Ryc. 2. Elementy obszaru zasilania ujęcia wyznaczone odrębnie

proponuje się wykorzystanie odpowiedniego programu komputerowego do konstruowania izolinyi powierzchni trójwymiarowej (3D). W pracowniach hydrogeologicznych, wyposażonych w komercyjne pakiety szybkich, współczesnych programów komputerowych, izolinie te otrzymuje się z wykorzystaniem rozmaitych modeli o szerokim zakresie możliwości odwzorowania różnych aspektów środowiska geologicznego. Autor do demonstracji konstrukcji komputerowej miał dostępny jedynie program *Surfer 8* firmy *Golden Software*. Żeby móc skorzystać z programu należy w arkuszu kalkulacyjnym *Excel* utworzyć plik opisujący punkty powierzchni 3D współrzędnymi kartezjańskimi (zero układu w środku ujęcia), koniecznie w takim oto porządku: każdy wiersz dotyczy innego punktu, kolumna pierwsza zawiera współrzędną  $x$  (która nie jest teraz odległością  $r$  od studni), druga – współrzędną  $y$ , trzecia – współrzędną  $z$ . W rozważanym tutaj zagadnieniu

współrzędną  $z$  ma być rzędną prognozowaną  $p$ , obliczaną odejmowaniem wg wzoru (9), które to odejmowanie wyraża istotę metody superpozycji. Rzędną naturalną  $n$  przyjmuje się z planu hydroizohips, ale depresję  $s$  trzeba dla potrzeb programu wyrazić za pomocą odległości  $r$  punktu obliczeniowego od osi studni. Przy założeniu osi  $x$  i  $y$  jak w powyższym przykładzie:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (10)$$

Na użytek programu potrzebna jest więc funkcja  $s(r)$ , czyli odwrotna względem funkcji  $r(s)$  wyrażonej zapisem (7). Pomijając szczegóły matematycznego analizowania zagadnień istnienia i jedności tej funkcji, łatwo stwierdzić, że – dążąc do wyrażenia wielkości  $s$  ze wzoru (7) – otrzymuje się równanie kwadratowe w postaci:



$$s^2 - 2Hs + \left[ 1 - \frac{\ln\left(\frac{r}{r_s}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_s}\right)} \right] \cdot (2H - s_0) s_0 = 0. \quad (11)$$

Pierwiastkiem przyjętym (drugi pierwiastek odrzucamy) tego równania jest funkcja  $s(r)$  w postaci:

$$s = H \left[ 1 - \sqrt{1 + s_w (2 - s_w) \frac{\ln\left(\frac{r}{R}\right)}{\ln\left(\frac{R}{r_s}\right)}} \right], \quad (12)$$

gdzie  $s_w$  oznacza depresję względną  $s_0/H$ .

Kontynuując rozpoczęty wyżej przykład obliczeniowy, teraz dla pokazania postępowania z programem *Excel*, otrzymuje się:

$$s_w = \frac{15}{30} = 0,5,$$

$$\ln\left(\frac{R}{r_s}\right) = 8,9$$

i ze wzoru (12):

$$s(r) = 30 \left( 1 - \sqrt{1 + 0,084 \ln\left(\frac{r}{1500}\right)} \right). \quad (13)$$

W arkuszu kalkulacyjnym w kolejnych kolumnach (A–F) powinny się znaleźć następujące wartości:

A – współrzędna x,

B – współrzędna y,

C – współrzędna  $n = 100 + 0,001 \cdot B2$ ,

D – r wg wzoru (10),

$$E - s = 30 \left( 1 - \sqrt{1 + 0,084 \ln\left(\frac{D2}{1500}\right)} \right),$$

F –  $p = n - s = C2 - E2$ .

Następnie trzeba utworzyć plik z trzema kolumnami (A, B i F) i eksportować go z *Excelsa* do odpowiedniego arkusza programu oraz zastosować kroki programowe przewidziane w nim do utworzenia pliku *Grid* i potem pliku *Contour Map*. Doprowadzą one do wygenerowania mapy izolinii z ich opisami (ryc. 3). Autor nie odnalazł w *Surferze 8* narzędzia do automatycznej konstrukcji siatki krzywoliniowej ortogonalnej, a do programu z takim narzędziem dostępu nie miał, więc kilka linii prądu wykreślił odręcznie, starając się zachować ortogonalność (pełnią one funkcję tylko ilustrującą, jakościową i nie stanowią z rodziną hydroizohips siatki hydrodynamicznej). Porównując konstrukcję odręczną (ryc. 2) z komputerową (ryc. 3), np. poprzez odczytanie współrzędnych przecięcia prognozowanych hydroizohips 98, 99 i 100 z osiami X i Y, można zauważyć, że oba rysunki nie wykazują istotnych różnic w mapie hydro-

izohips prognozowanych, a różnice w pracochłonności obu metod są ogromne – oczywiście na korzyść konstrukcji komputerowej.

### Probabilistyczne podejście do niezgodności we wstępnych obliczeniach zasobów ujęcia rozmaitymi metodami

Po wstępnym wyznaczeniu OZU i jego powierzchni  $F = 60 \text{ km}^2$  oszacowuje się zazwyczaj zasoby ujęcia na (przynajmniej) dwa sposoby:

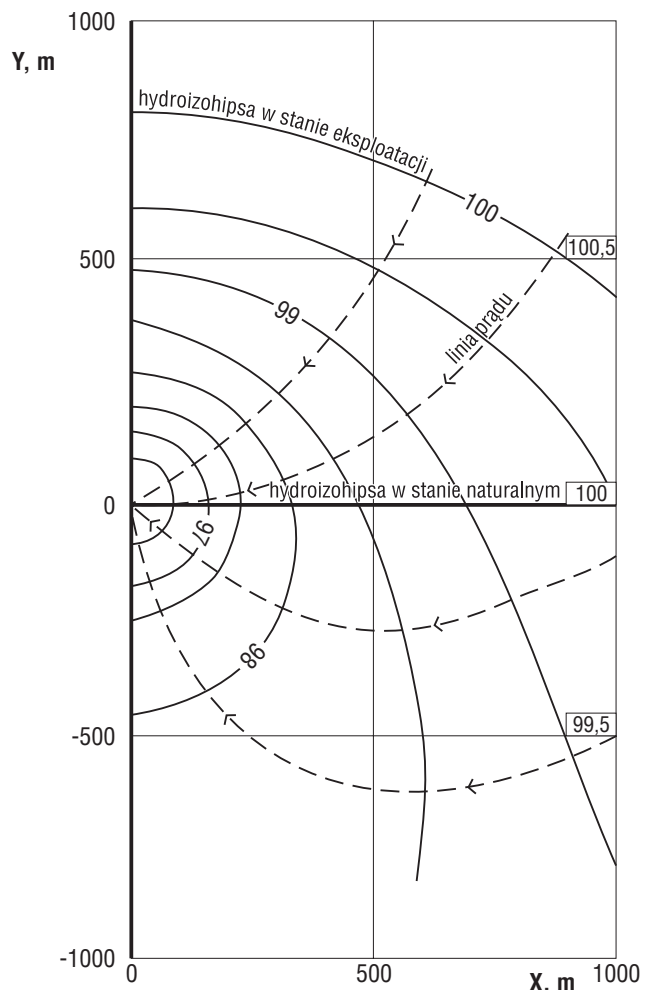
□ mnożąc tę powierzchnię przez moduł zasilania (woda wodonośnej warstwy czwartorzędu pierwszego poziomu, dolina rzeczna)  $M = 20 \frac{\text{m}^3}{\text{h} \cdot \text{km}^2}$ , czyli

17,5 cm/rok i otrzymując:

$$Q_1 = FM = 60 \cdot 20 = 1200 \text{ m}^3 / \text{h}, \quad (14)$$

□ korzystając ze wzoru Dupuita [przekształcona różnica wyrażeń (4) – (3)] i otrzymując:

$$Q_2 = \frac{\pi k (H^2 - h^2)}{\ln\left(\frac{R}{r_s}\right)} = \pi \frac{3,6 \cdot (900 - 100)}{\ln\left(\frac{1500}{0,2}\right)} = 1014 \text{ m}^3 / \text{h}, \quad (15)$$



Ryc. 3. Elementy obszaru zasilania ujęcia wyznaczone komputerowo w programie *Surfer 8*

przy czym, jak już zaznaczono, należy pominąć zeskok  $\Delta = 5$  m, tj. przyjmując  $h = h_0 = 10$  m (por. ryc. 1). Otrzymane tu duże wartości zasobów nie są związane z żadnym konkretnym ujęciem i są abstrahowane od dostępnych technicznych środków realizacji poboru. Dla konkretnego ujęcia zawsze konieczna jest standardowa analiza możliwości poboru.

Nie tak rzadko okazuje się, tak jak w omawianym przykładzie, że  $Q_1 \neq Q_2$  i że dokumentator na etapie wstępnym nie dysponuje kryterium wyboru między różniącymi się wartościami. Proponuje się tu, aby w takich sytuacjach przyjmować kryterium probabilistyczne, bowiem obliczenia wzorami (14) i (15) mają charakter deterministyczny, a nieokreśloności rozmaitego pochodzenia (losowość, nieostrość, tzw. wielkie błędy i in.), związane z poszczególnymi wielkościami, są w nich pomijane.

Postulowane kryterium probabilistyczne głosi, że należy wybrać tę wartość, której można przyporządkować największe prawdopodobieństwo sukcesu. Do wyznaczenia tego prawdopodobieństwa zaleca się tu adaptowanie w hydrogeologii procedur stosowanych w ocenie niezawodności lub bezpieczeństwa w innych dziedzinach przyrodniczo-technicznych, chodzi tu bowiem o niezawodność w dostarczaniu określonej ilości wody odbiorcom. Spośród wielu procedur niezawodnościowych za stosunkowo łatwą do przyswojenia można uznać szybką technikę obliczeniową Lowa i Tanga, w skrócie LT (Low & Tang, 1997; Haurýkiewicz, 2003). Stosując technikę LT, należy:

- ustalić parametry  $x_i$  istotne dla danego zagadnienia; w interpretacji geometrycznej wyznaczają one tzw. przestrzeń stanów, w której każdemu punktowi odpowiada określony zbiór wartości parametrów  $x$ ;
- sformułować wyrażenie funkcji granicznej  $g(x)$ , określające stany graniczne B (od ang. *boundary*); w interpretacji geometrycznej rozdzielają one przestrzeń stanów na obszar stanów dozwolonych S (od ang. *safe* – pożądaných, bezpiecznych) i niedozwolonych F (od ang. *forbidden, failure* – niepożądanych, niebezpiecznych); w zagadnieniu dwuwymiarowym (2D) stany graniczne tworzą linię na płaszczyźnie, w zagadnieniach więcejwymiarowych (nD) – tzw. hiperpowierzchnię graniczną BH (od ang. *boundary hypersurface*), której kształtu przy  $n > 3$  zazwyczaj nie umiemy sobie wyobrazić;
- w obszarze stanów pożądaných S przyjmując stan oceniany E (od ang. *evaluated*), dla którego ma być oszacowane prawdopodobieństwo sukcesu  $P_s$ . Wartości parametrów podstawiane na początku tego rozdziału do wzorów (14) i (15) nie wyznaczają punktu w obszarze S, lecz pewien punkt B na linii granicznej, bo wykorzystano je do obliczenia granicznej wartości zasobów wzorem (14) lub (15). Prawdopodobieństwo sukcesu obliczane dla punktu granicznego jest równe 0,5, niezależnie od funkcji granicznej, nie ma więc ono żadnej wartości porównawczej. Do celów porównania prawdopodobieństwa sukcesu  $P_s$  wg tych wzorów można przyjmując punkt E o współrzędnych punktu B, nieznacznie zmienionych w pożądanym kierunku (tj. tak, aby zwiększyć zasoby  $Q$ ), wg tej samej zasady dla obu wzorów, np. o 1%. W przypadku zmiennej o rozkładzie normalnym odpowiada to założeniu współ-

czynnika zmienności 0,1 (odchylenie standardowe równe jest 10% wartości oczekiwanej w punkcie B) i zmianie współrzędnych punktu B o 10% tego odchylenia standardowego);

- przyporządkować poszczególnym parametrom  $x$  w punkcie E charakterystyki probabilistyczne (rozkład, wartość oczekiwana, miara zmienności) oraz korelacje międzyparametrowe;
- sprecyzować macierz kowariancji C;
- wprowadzić powyższą informację do arkusza kalkulacyjnego, np. do *Excela*;
- uaktywnić narzędzie optymalizacyjne używanego programu komputerowego (w *Excelu* nosi ono nazwę *Solver*) i wprowadzić do niego warunki optymalizacji;
- wydać programowi polecenie optymalizacji.

Rezultatem otrzymywanym po wykonaniu ostatniego kroku jest prawdopodobieństwo sukcesu  $P_s$ , tj. znajdowania się stanu ocenianego E w obszarze stanów dozwolonych S.

W odniesieniu do wzoru (14) wymienione wyżej kroki obliczeniowe otrzymują przedstawioną niżej konkretyzację (oraz ilustrację w postaci tabeli 1).

Parametrami istotnymi są  $x_1 = F$  i  $x_2 = M$ . Symbole te zapisano w kolumnie A – dla zapamiętania, który wiersz odpowiada któremu parametrowi.

Ze wzoru (14) wyznacza się jeden z parametrów jako funkcję pozostałych i przenosi się go na drugą stronę równania, np.:

$$F = \frac{1200}{M}, \quad (16)$$

$$\frac{1200}{M} - F = 0. \quad (17)$$

Funkcją graniczną  $g(x)$  jest wyrażenie po lewej stronie równania (17), które zapisuje się w arkuszu (tu w komórce B12) jako formułę z użyciem oznaczeń komórek:

$$g(x) = \frac{1200}{B3} - B2. \quad (18)$$

Punkt graniczny B ma współrzędne (60; 20). Są to wartości wykorzystane do obliczenia liczby 1200 jako granicznej wartości zasobów.

Odchylenia standardowe  $s$  tworzą wektor (6; 2), który zapisany jest w kolumnie E z odpowiednim nagłówkiem  $s$  w komórce E1. Punkt oceniany E ma współrzędne (60,6; 20,2), korzystniejsze dla zasobów niż współrzędne punktu granicznego B. Zapisane są one w kolumnie C oznaczonej nagłówkiem  $m$ , tradycyjnie używanym dla wartości oczekiwanych lub średnich.

Parametrom stanu przypisano rozkłady normalne, z wartościami oczekiwanymi wg kolumny  $m$  i odchyleniami standardowymi wg kolumny  $s$ . Przyjęto, że parametry nie są skorelowane.

Macierz kowariancji C zapisano w obszarze (F2; G3) arkusza. Na jednej przekątnej ma ona kwadraty odchyłeń standardowych, odpowiednich dla poszczególnych wierszy, na drugiej – zera, jako konsekwencję braku korelacji.

Tabela 1 pokazuje rozmieszczenie danych z dotychczas omówionej informacji liczbowej w arkuszu kalkulacyjnym

Excel. Ponadto umieszczono w niej obiekty matematyczne potrzebne do obliczenia prawdopodobieństwa przez narzędzie Solver: macierz odwrotną  $C^{-1}$ , wektor transponowany z kolumny D,  $(x-m)T$ , iloczyn tego wektora i macierzy odwrotnej,  $(x-m)T \cdot C^{-1}$ , wyprowadzoną wyżej formułę funkcji granicznej  $g(x)$ . Komórce C12 należy przypisać formułę na kwadrat wskaźnika niezawodności  $\beta$ :

$$\beta^2 = (x-m)T \cdot C^{-1} \cdot (x-m), \quad (19)$$

komórce D12 – pierwiastek kwadratowy z komórki C12, komórce F12 – wartość dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego dla liczby z komórki E12 (oblicza ją Excel), komórce G12 – formułę  $(1-F12)$ , która wyznacza prawdopodobieństwo sukcesu  $P_s$ , a komórce H12 – formułę  $(G12-0,5)$ , wyznaczającą przyrost prawdopodobieństwa sukcesu przy zmianie stanu z granicznego w punkcie B na stan oceniany w punkcie E (w stanie granicznym bowiem  $P_s = 0,50$ ).

Po wprowadzeniu omówionych formuł należy jeszcze skopiować wektor  $m$  z kolumny C do pustej kolumny B z nagłówkiem  $x$ , przez co w dalszym postępowaniu komputerowym procedura optymalizacyjna, dobierająca wartości graniczne  $x$  parametrów  $F$  i  $M$ , startuje z wartości oczekiwanych  $m$ .

Solver uaktywnia się z menu narzędzi, po czym należy do tabelki wprowadzić warunki optymalizacji: komórka celu D12, poszukiwanie minimum, komórki zmieniane B2 i B3, ograniczenie na komórkę B12 = 0.

Polecenie optymalizacji wydaje się, klikając w przycisk Rozwiąż.

Teraz Solver dobiera próbne wartości wektora  $x$  z kolumny B i oblicza wskaźnik niezawodności w komórce D12, aż otrzyma obramowane minimum. W kolumnie  $x$  pozostają odpowiadające temu minimum wartości graniczne, na ogół inne niż w punkcie granicznym B.

W rezultacie przeprowadzenia tej procedury otrzymuje się wartość prawdopodobieństwa sukcesu  $P_s = 0,556$  z komórki G12, którą trzeba porównać z analogicznie obliczoną wartością ze wzoru (15).

W odniesieniu do wzoru (15) wymienione wyżej kroki obliczeniowe wykonuje się podobnie i otrzymuje wynik jak w tabeli 2. Trzeba jedynie dodać, że wyjściowy do obliczeń punkt graniczny B ma współrzędne (3,6; 30; 10; 1500; 0,20) oraz że do obliczenia współrzędnych

Tab. 1. Arkusz Excel z obliczeniem niezawodności zasobów wg wzoru (14)

|    | A        | B                              | C              | D           | E               | F                     | G         | H               |
|----|----------|--------------------------------|----------------|-------------|-----------------|-----------------------|-----------|-----------------|
| 1  |          | <b>x</b>                       | <b>m</b>       | <b>x-m</b>  | <b>s</b>        | <b>C</b>              |           |                 |
| 2  | <b>F</b> | 60,00004                       | 60,6           | -0,599961   | 6               | 36                    | 0         |                 |
| 3  | <b>M</b> | 19,99999                       | 20,2           | -0,200013   | 2               | 0                     | 4         |                 |
| 4  |          |                                |                |             |                 |                       |           |                 |
| 5  |          | <b>(x-m)T</b>                  |                |             |                 | <b>C<sup>-1</sup></b> |           |                 |
| 6  |          | -0,599961                      | -0,200013      |             |                 | 0,027778              | 0         |                 |
| 7  |          |                                |                |             |                 | 0                     | 0,25      |                 |
| 8  |          | <b>(x-m)T * C<sup>-1</sup></b> |                |             |                 |                       |           |                 |
| 9  |          | -0,016666                      | -0,050003      |             |                 |                       |           |                 |
| 10 |          |                                |                |             |                 |                       |           |                 |
| 11 |          | <b>g(x)</b>                    | <b>betkwad</b> | <b>beta</b> | <b>minusbet</b> | <b>Pf</b>             | <b>Ps</b> | <b>delta Ps</b> |
| 12 |          | -3,56E-08                      | 0,02           | 0,141421    | -0,141421       | 0,443769              | 0,556231  | 0,056231        |

Tab. 2. Arkusz Excel z obliczeniem niezawodności zasobów wg wzoru (15)

|    | A         | B                              | C              | D           | E               | F         | G         |                 |
|----|-----------|--------------------------------|----------------|-------------|-----------------|-----------|-----------|-----------------|
| 1  |           | <b>x</b>                       | <b>m</b>       | <b>x-m</b>  | <b>s</b>        |           |           |                 |
| 2  | <b>k</b>  | 3,6082406                      | 3,636          | -0,027759   | 0,36            |           |           |                 |
| 3  | <b>H</b>  | 29,785736                      | 30,3           | -0,514264   | 3               |           |           |                 |
| 4  | <b>h</b>  | 9,9185676                      | 9,9            | 0,018568    | 1               |           |           |                 |
| 5  | <b>R</b>  | 1485,0006                      | 1485           | 0,000595    | 150             |           |           |                 |
| 6  | <b>rs</b> | 0,22                           | 0,202          | 0,018       | 0,02            |           |           |                 |
| 7  |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 8  |           | <b>(x-m)T</b>                  |                |             |                 |           |           |                 |
| 9  |           | -0,027759                      | -0,514264      | 0,018568    | 0,000595        | 0,018     |           |                 |
| 10 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 11 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 12 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 13 |           | <b>C</b>                       |                |             |                 |           |           |                 |
| 14 |           | 0,1296                         | 0              | 0           | 0               | 0         |           |                 |
| 15 |           | 0                              | 9              | 0           | 0               | 0         |           |                 |
| 16 |           | 0                              | 0              | 1           | 0               | 0         |           |                 |
| 17 |           | 0                              | 0              | 0           | 22500           | 0         |           |                 |
| 18 |           | 0                              | 0              | 0           | 0               | 0,0004    |           |                 |
| 19 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 20 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 21 |           | <b>C<sup>-1</sup></b>          |                |             |                 |           |           |                 |
| 22 |           | 7,7160494                      | 0              | 0           | 0               | 0         |           |                 |
| 23 |           | 0                              | 0,111111       | 0           | 0               | 0         |           |                 |
| 24 |           | 0                              | 0              | 1           | 0               | 0         |           |                 |
| 25 |           | 0                              | 0              | 0           | 4,44E-05        | 0         |           |                 |
| 26 |           | 0                              | 0              | 0           | 0               | 2500      |           |                 |
| 27 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 28 |           | <b>(x-m)T * C<sup>-1</sup></b> |                |             |                 |           |           |                 |
| 29 |           | -0,214193                      | -0,05714       | 0,018568    | 2,64E-08        | 45        |           |                 |
| 30 |           |                                |                |             |                 |           |           |                 |
| 31 |           | <b>g(x)</b>                    | <b>betkwad</b> | <b>beta</b> | <b>minusbet</b> | <b>Pf</b> | <b>Ps</b> | <b>delta Ps</b> |
| 32 |           | 0,00E+00                       | 0,8456759      | 0,919606    | -0,919606       | 0,178889  | 0,821111  | 0,321111        |

punktu E, korzystniejszych dla zasobów, parametry  $h$ ,  $R$  i  $r_s$  punktu B zmniejszono, a parametr  $k$  zwiększono. Funkcja graniczna ma tu postać (z wykorzystaniem oznaczeń odpowiednich komórek *Excelsa*):

$$g(x) = \frac{1014}{\pi} \cdot \frac{[\ln(B5) - \ln(B6)]}{B3^2 - B4^2} - B2 \quad (20)$$

Formułę z prawej strony równania (20) wprowadzono w komórkę A32.

*Solver* podaje dla wzoru (15) prawdopodobieństwo sukcesu  $P_s$  równe 0,82, co w porównaniu z wynikiem dla wzoru (14) i zgodnie z przyjętym probabilistycznym kryterium wyboru oznacza, że z dwóch wartości ocenianych wstępnie zasobów (1200 i 1014 m<sup>3</sup>/h) należy wybrać wartość 1014 m<sup>3</sup>/h.

### Komentarze do kryterium probabilistycznego

Kryterium zaproponowane w niniejszej pracy służy tylko do wyboru jednej z kilku wartości obliczanych deterministycznie – nie orzeka jednak, czy prawdopodobieństwo sukcesu wybranej wartości jest wystarczające do oparcia się na niej podczas np. obliczania należności skarbowych, płatności gminie, sprzedaży nieruchomości, ubezpieczenia, podziału masy spadkowej, bilansowania zasobów czy ich ochrony przed skażeniem. Na potrzeby artykułu wybrano przykład zasobów o wartości 1014 m<sup>3</sup>/h, ale komórka F32 na tablicy 2 informuje, że jest z nią związane prawdopodobieństwo sukcesu  $P_s = 0,82$ , wystarczające do porównania z wariantem wg wzoru (14), niewystarczające jednak do jej dalszego wykorzystania w aspektach wymienionych powyżej, w których wymagane jest prawdopodobieństwo sukcesu nie mniejsze niż 0,95, a niekiedy nie mniejsze niż 0,995.

Zreferowana tu szybka technika LT oceny niezawodności może być wykorzystana zarówno do wyznaczenia prawdopodobieństwa wybranego wariantu (co zrobiono w opisanym przykładzie), jak i stanu ocenianego E o żądanym prawdopodobieństwie sukcesu (0,95; 0,995 i in.), czym nie zajmowano się w tej pracy.

Zmianę (w tym i poprawę) wyznaczonego prawdopodobieństwa sukcesu w pewnym stanie E uzyskuje się przez zmianę wprowadzanych charakterystyk probabilistycznych parametrów, zwłaszcza zmienności (np. odchylenia standardowego) i korelacji. Może się do tego okazać potrzebne przeprowadzenie odpowiednich badań statystycznych, a także zmiana funkcji granicznej – niech Czytelnik przekona się, o ile wyższą niż 0,995 otrzyma wartość prawdopodobieństwa sukcesu dla wzoru (15) (tab. 2), jeśli w wyrażeniu (20) pominie ludolfinę.

W przykładzie zakładano, zgodnie z techniką LT, że przestrzeń stanów jest probabilistycznie jednorodna, czyli że w każdym punkcie tej przestrzeni są takie same charakterystyki probabilistyczne parametrów: rozkład, zmienność i korelacje. Nie zawsze tak jest w rozmaitych zagadnieniach przyrodniczych, technicznych i innych, gdy badanie obiektu rzeczywistego wykazuje zmianę tych charakterystyk przy zmianie stanu. Przy wyznaczaniu prawdo-

podobieństwa sukcesu technika LT powinna być wtedy zmodyfikowana; można też posłużyć się autorską metodą metryczną (Hauryłkiewicz, 1991). Tych spraw w niniejszym artykule bliżej się jednak nie rozważa.

### Wnioski

Obszar zasilania ujęcia (OZU) i jego zasoby można jeszcze przed pompowaniem próbnym wstępnie wyznaczać odręcznie lub komputerowo, korzystając ze wzorów wyprowadzonych dla ujęcia wody podziemnej o zwierciadle swobodnym. W przypadku wód pod ciśnieniem trzeba adaptować odpowiednio inne wzory Dupuita, postępując analogicznie do procedur zaproponowanych w niniejszym tekście.

Podejście probabilistyczne do wyznaczania OZU i wielkości zasobów ułatwia podjęcie decyzji co do przyjęcia jego wyników i ich dalszego zastosowania.

### Podziękowania

Autor dziękuje swoim kolegom i koleżankom z czasów jego pracy w Regionalnym Zarządzie Gospodarki Wodnej w Poznaniu w latach 1992–2007 za życzliwą pomoc w rozmaitych zagadnieniach informatycznych, zawodowych oraz urzędniczych. Po latach okazała się przydatną w opracowaniu niniejszego artykułu. Niech będzie on dla Nich pewną formą wdzięczności autora.

### Literatura

- ABRAMOW S.K. 1973 – Podziemny drenaż w promyślnym i miejskim stroitelstwie. Strojizdat, Moskwa.  
 BALCERKIEWICZ Z. & WESOŁEK J. 2008 – Obszar zasilania ujęcia jako element ochrony wód podziemnych przed zanieczyszczeniami. [W:] Problemy wykorzystania wód podziemnych w Gospodarce Komunalnej. Materiały XVII Sympozjum Naukowo-Technicznego pt. „Zrównoważone gospodarowanie zasobami podziemnymi na terenach przekształconych antropogenicznie”, Częstochowa, 17–18.04.2008: 75–78.  
 BEAR J., ZASLAVSKY D. & IRMAY S. 1968 – Physical principles of water percolation and seepage. UNESCO, N. York.  
 DĄBROWSKI S. & PRZYBYŁEK J. 2005 – Metodyka próbnych pompowań w dokumentowaniu zasobów wód podziemnych. Poradnik metodyczny. MOŚZNIŁ, Warszawa.  
 HAURYŁKIEWICZ J. 1991 – Metryczna metoda oceny bezpieczeństwa podłoża budowli. Wyd. Uczeln. Wyższej Szkoły Inżynierskiej, Koszalin.  
 HAURYŁKIEWICZ J. 2003 – Szybka technika LT oceny bezpieczeństwa budowli. Inż. i Bud., 7: 386–389.  
 KNAUPE W. 1979 – Baugrubensicherung und wasserhaltung. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin (tłum. na ros. 1988 – Ustrojstwo kotłowni i wodopozyskiwania. Strojizdat, Moskwa).  
 LOW B.K. & TANG W.H. 1997 – Efficient reliability evaluation using spreadsheet. Journ. of Engineering Mechanics ASCE, 123: 749–752.  
 MACIOSZCZYK T., RODZIOCH A. & FRĄCZEK E. 1992 – Wyznaczanie stref ochronnych ujęć wód podziemnych. Poradnik metodyczny. Warszawa.  
 SILIN-BEKZURIN A.I. 1965 – Dynamika podziemnych wód. Izd. Moskowskiego Uniwersytetu, Moskwa.  
 SZCZELKACZEW W.N. & ŁAPUK B.B. 1949 – Podziemna gidrawlika. Gostechizdat, Moskwa.  
 SZESTAKOW W.M. 1973 – Dynamika podziemnych wód. Izd. Moskowskiego Uniwersytetu, Moskwa.

Praca wpłynęła do redakcji 22.06.2009 r.  
 Po recenzji akceptowano do druku 2.12.2009 r.